



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

LA MATEMATICA DELL'OROLOGIO

Relatore:

Prof. Lucio Cadeddu

Tesi di laurea:

Stefania Marra

Anno Accademico 2011/2012

"La Natura è un libro scritto in caratteri matematici"
(Galileo Galilei 1564-1642)

Indice:

1. Breve storia della matematica nella misurazione del tempo.....	2
2. Richiami di matematica e fisica.....	8
3. Matematica dell'orologio-Ingranaggi e ruotismo.....	12
4. Orologio meccanico.....	27
5. Bibliografia e Sitigrafia.....	33

1. Breve storia della matematica nella misurazione del tempo

Il tempo ha giocato un ruolo centrale nella matematica sin dai suoi inizi, eppure resta uno degli aspetti più misteriosi del mondo in cui viviamo. La nascente civiltà sulla Terra ebbe bisogno della conoscenza delle stagioni, e i misteri sulla lunghezza dell'anno, del mese e del giorno cominciarono ad essere studiati approfonditamente.

Molti filosofi hanno cercato di fare i conti con questo concetto, alcuni hanno sostenuto infatti che il tempo fosse una proprietà fondamentale dell'universo, mentre altri hanno sostenuto che si trattasse di un'illusione o di una proprietà della mente umana e non del mondo. Un grande sforzo è stato compiuto per la creazione di dispositivi per una misurazione precisa del tempo sin dagli inizi della storia documentata fino ad oggi.

La meccanica quantistica e la teoria della relatività del XX secolo hanno mostrato la complessità e gli apparenti paradossi nella nozione di tempo. Tuttavia la matematica di base richiede la nozione di tempo per capire e sviluppare i calcoli riguardo ad una particella, la cui posizione al tempo t rispetto agli assi cartesiani è data da $x(t)$, mentre la sua velocità ed accelerazione si ottengono con derivazioni successive di quest'ultima. Questo quindi richiede che il tempo sia continuo e che un intervallo di tempo sia sempre divisibile, ma la teoria quantistica ci dice che il tempo è quantizzato e molto diverso dal tempo matematico che costituisce la base della matematica applicata. Vediamo quindi come si svilupparono le idee per la misurazione del tempo, fino ad arrivare al concetto di tempo matematico assoluto di Newton.

La matematica quasi certamente fonda le sue basi nello studio del tempo, in particolare nella necessità di registrare sequenze di eventi. Per esempio la comprensione delle stagioni è di vitale importanza per una crescita efficace delle colture, quindi: quando si deve seminare? Quando arriveranno le piogge? Quando i fiumi saranno in piena? Quando iniziare la raccolta?

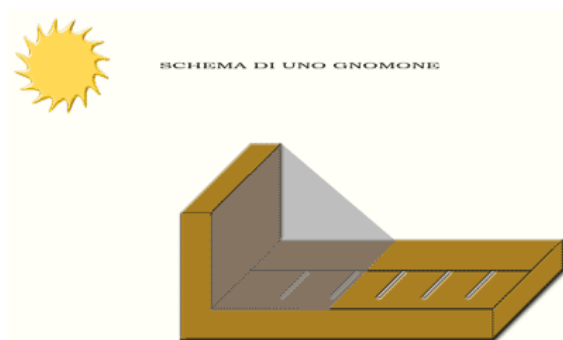
Gli orologi naturali nel cielo sono il passaggio quotidiano del sole e le fasi mensili della luna. Il fatto che la conoscenza della lunghezza dell'anno fosse fondamentale, anche se meno chiara dei segni tempo degli astri, portò quindi a diversi calcoli con lo scopo di ottimizzare la suddivisione del tempo. E' stato per esempio necessario numerare i giorni e i mesi, dando origine così ai calendari.

Le prime prove di misurazione del tempo risalgono a circa 20.000 anni fa; si possono osservare infatti segni su bastoni e ossa in Europa in quel periodo, probabilmente riguardanti i giorni trascorsi tra due lune nuove. Nel caso degli egizi, per esempio, era importante conoscere quando il Nilo sarebbe stato in piena e questo giocò un ruolo fondamentale nel modo in cui il loro calendario fu sviluppato a partire da una prima versione, risalente circa al 4500 a.C., basata sui mesi. Dal 4236 a.C. è stato scelto l'inizio dell'anno in corrispondenza del sorgere della stella Sirio, la più luminosa in cielo. La levata eliaca è la prima apparizione della stella dopo il periodo nel quale è troppo vicina al sole per essere visibile. Per Sirio questo si verifica nel mese di luglio e questa data si considera come inizio del nuovo anno. L'esondazione del Nilo poco dopo questa data, quindi, rappresenta un inizio naturale dell'anno. Il sorgere di Sirio dunque comunicava alla gente l'imminente inondazione. L'anno è stato calcolato per essere di 365 giorni, e dal 2776 a.C. era conosciuto a questo livello di precisione. E' stato creato in seguito un calendario civile per la registrazione

delle date. Più tardi si trovarono valori più accurati per la durata dell'anno, ma il calendario civile non è mai stato modificato per tenere conto di questo.

Dividere l'anno in mesi è stato naturale ma complicato, poiché non si otteneva un numero intero di mesi in un anno, o di giorni in un mese. D'altra parte un giorno era un periodo di tempo molto lungo e c'era chiaramente la necessità di suddividere la giornata in frazioni più piccole, ma non era chiaro come operare. Attorno al 3000 a.C. i Sumeri divisero la giornata in 12 periodi e ciascuno di questi in 30 parti. La civiltà babilonese che si sviluppò circa 1000 anni più tardi nell'area dell'odierno Iraq, in analogia con i Sumeri, divise la giornata in 24 ore, ciascuna ora in 60 minuti e ciascun minuto in 60 secondi. E' proprio da questa suddivisione della giornata che risale la nostra unità di misura del tempo. Va notato comunque, naturalmente, che questa suddivisione del tempo, anche se derivante dalle versioni babilonesi, non è oggi definita da dati astronomici. Dobbiamo inoltre notare che molte unità di tempo variano durante tutto l'anno, come ad esempio la durata del giorno e della notte che varia nelle diverse stagioni.

Le unità di tempo richiedono dei meccanismi per misurarle e, non sorprendentemente, a causa delle loro



definizioni astronomiche, i primi dispositivi per la misurazione del tempo sfruttavano il sole. A partire dal 3500 a.C. è stato utilizzato lo gnomone, costituito da un bastone verticale o da un monumento sottile la cui ombra indicava l'ora del giorno. Più tardi, circa nel 1500 a.C. si iniziò ad usare la meridiana. Il problema principale di questo strumento è che il sole compie un percorso diverso nel cielo durante l'anno. Per garantire quindi che la meridiana registri l'ora esatta

durante tutto l'anno, lo gnomone deve essere esattamente all'angolazione giusta. Questa comunque divenne più precisa con l'introduzione delle meridiane emisferiche intorno al 300 a.C.. L'architetto romano Vitruvio in "De architectura" fu in grado di descrivere 13 modelli diversi di meridiana.

Naturalmente il sole non poteva essere utilizzato per indicare l'ora di notte; infatti in Egitto, sempre nello stesso periodo, erano in uso le clessidre o gli orologi ad acqua. Questi ultimi misuravano lo scorrere del tempo tramite delle tacche segnate all'interno di un contenitore nel quale veniva praticato un foro per permettere il flusso dell'acqua. Le prime versioni non tenevano comunque conto del fatto che l'acqua scende più lentamente al diminuire della pressione. Nella clessidra invece veniva usata normalmente della sabbia, misurando il tempo che impiegava per scivolare completamente dal primo al secondo contenitore.

In queste prime civiltà vi è un alto significato religioso nella misurazione del tempo. Naturalmente l'importanza del successo nella gestione delle colture per la sopravvivenza della popolazione permetteva al tempo di guadagnare un significato religioso. Anche l'osservanza religiosa richiedeva che alcuni eventi si realizzassero in un particolare periodo dell'anno, era quindi necessaria un'approfondita conoscenza del calendario. Un esempio di questo ragionamento si trova ancora nel calcolo della data per i festeggiamenti della Pasqua cristiana. Essa è infatti stabilita nella domenica successiva alla prima luna piena dopo l'equinozio di primavera.

Un intreccio più sofisticato del tempo nella religione avviene con Pitagora e Buddha, attorno al 500 a.C.. Essi sostenevano infatti che la reincarnazione dell'uomo si verificasse ciclicamente al compimento di un corso astronomico dell'universo. Alcune religioni come il Giudaismo e il Cristianesimo si basano su una storia della creazione del mondo dove il tempo inizia proprio nel momento stesso della creazione. In queste religioni l'autore è spesso considerato al di fuori del tempo, un concetto genericamente difficile da capire. Esaminiamo alcuni primi, ma significativi, contributi alla comprensione del concetto di tempo.

Zenone di Elea , intorno al 450 a.C., ha elencato una serie di paradossi che indicavano aspetti sconcertanti del tempo. Nel paradosso 'La Freccia' Zenone sostiene, dalle parole di Aristotele:

Se, dice Zeno , tutto è sia a riposo sia in moto quando occupa uno spazio uguale a se stesso, in un istante la freccia che si muove è ferma. Zeno sostiene infatti che la freccia appare in movimento ma, in realtà, è immobile. In ogni istante difatti essa occuperà solo uno spazio che è pari a quello della sua lunghezza; e poiché il tempo in cui la freccia si muove è fatto di singoli istanti, essa sarà immobile in ognuno di essi.

L'argomento si basa sul fatto che se in un istante indivisibile di tempo la freccia si muove, allora davvero questo istante di tempo è divisibile (per esempio in una piccola 'istantanea' di tempo la freccia si muoverebbe della metà della distanza). Aristotele sostiene invece che:

...il tempo non è composto da degli indivisibili 'adesso' come ogni altra grandezza.

Per Aristotele negare l'esistenza di un 'adesso', inteso come istante che divide il passato dal futuro sembra anche andare contro l'intuizione. D'altra parte se l'istante 'adesso' non esiste, la freccia non occupa nessuna posizione particolare e nemmeno questo sembra esatto. Il paradosso di Zeno sembra risolto troppo facilmente da Aristotele.

Studiamo invece adesso come Aristotele e Platone concepivano il tempo. Platone sosteneva che il tempo è stato creato quando il Creatore plasmò il mondo da materiale esistente, dando forma alla materia primitiva. Platone sostiene nel 'Timeo' che il creatore:

...tra le varie cose plasma anche gli astri, il cui movimento regolare si identifica con il tempo, anzi, si può dire che gli astri non sono altro che strumenti del tempo. Il tempo è " immagine mobile dell'eternità ": come il mondo sensibile è imitazione di quello intellegibile (il primo mutevole, il secondo eterno), così il tempo è imitazione dell'eternità.

Non a caso il tempo viene identificato con il movimento circolare: se si vuole rappresentare l'eternità con qualcosa di movimentato, senz'altro ciò che meglio la rappresenta è il cerchio, il movimento circolare in cui si compie un giro per poi tornare al punto di partenza: infatti il tempo è caratterizzato dal non essere eterno ma torna sempre su se stesso. La cosa più simile a ciò che non si muove mai è quella che torna sempre su stessa. Dunque il tempo è la plasmazione dell'eternità ideale da parte del Demiurgo. La conseguenza è che non c'è un tempo prima del mondo perché è solo con la nascita del mondo sensibile che il Demiurgo ha calato nella realtà sensibile l'imitazione di eternità.

Aristotele invece si pone contro l'idea che il tempo è stato creato; le sue idee infatti legano il tempo al movimento. In un certo senso questo è ragionevole poiché per Aristotele il tempo si misurava mediante i moti dei corpi celesti quindi un periodo di tempo è rappresentato dal movimento del sole nel cielo. Altri modi di leggere l'ora come l'orologio ad acqua e la clessidra identificano il tempo con il movimento, in questi casi di acqua o sabbia. C'è un dibattito, sostiene Aristotele, per dire che il tempo non esiste, il passato infatti non esiste più e il futuro non esiste ancora. Dopo aver studiato questa argomentazione, la rifiuta e definisce il tempo come movimento che può essere enumerato. Da questo si capisce anche il motivo della sua critica contro il paradosso della freccia di Zeno. Per Zeno, la freccia non può muoversi perché non si muove nell'istante considerato. Tuttavia, per Aristotele, il tempo stesso è movimento; il flusso del tempo è il movimento della freccia o del sole e della luna nel cielo.



Mattia Preti- Sant'Agostino

S. Agostino, alla fine del IV secolo d.C., portò molte delle idee di Platone nel Cristianesimo. Secondo la versione di Platone della creazione, non abbastanza in linea con il racconto contenuto nella Genesi, dove Dio crea il mondo dal nulla, il mondo è stato creato per portare ordine nella materia primitiva. Tuttavia, Sant'Agostino è d'accordo con Platone sull'idea che il tempo inizia con la creazione. Egli risponde alla domanda del perché il mondo non è stato creato prima, affermando chiaramente che non c'è un 'prima'. Tuttavia, il concetto di tempo era ancora un enigma per Sant'Agostino:

Cos'è dunque il tempo? Se nessuno me lo chiede, lo so, se voglio spiegare a chi chiede, non lo so.

Come Aristotele, anche Sant'Agostino si domanda se il passato o il futuro esistano davvero. Sicuramente solo il presente esiste realmente ed è istantaneo, misurato solo dal suo passaggio. Egli ha cercato di rispondere all'apparente contraddizione sul passato e il futuro affermando che il tempo passato non può essere pensato come passato, se si pensa ad esso nel presente. Egli identifica infatti tre tempi:

il presente del passato, il presente del futuro e il presente del presente.

Il presente del passato è la memoria, il presente del presente è la vista, e il presente del futuro è l'attesa.

Sant'Agostino aveva concluso che il tempo non esiste in assenza di una creatura intelligente che sia in grado di pensare al presente delle cose passate, presenti e future. Tuttavia egli non era molto felice delle proprie idee e pregò per l'illuminazione:

La mia anima anela a conoscere questo enigma così intricato. Confesso a Te, o Signore, che io sono ancora ignorante a proposito di che ora è.

Se le sue idee sono meno che soddisfacenti, almeno sant'Agostino ha apprezzato per la prima volta quella che è la complessità del concetto di tempo.

I PRIMI OROLOGI

I progressi nella misurazione del tempo in Europa furono inesistenti fino al 1300 d.C., ma i progressi in altri paesi sono continuati, soprattutto con l'introduzione degli orologi meccanici in Cina. L'invenzione dello scappamento a verga in Europa nel XIV secolo ha portato poi a una rivoluzione negli orologi meccanici. L'esempio più importante di questo tipo di meccanismo, anche se con alcune migliorie e complicazioni, è l'orologio astronomico di Strasburgo.

Sempre nel XIV secolo, Oresme pubblicò l'opera 'De proportionibus proportionum'. Egli si chiedeva se i moti celesti fossero misurabili, ovvero se ci fosse un intervallo di tempo *di base* in modo che giorno, mese e anno si potessero esprimere come multipli interi di questo. La sua trattazione risulta interessante poiché si domanda se, in sostanza, il tempo misurato dal sole e dalla luna è il tempo "stesso".

Nel corso del XVI secolo la soluzione dei problemi connessi al tempo divenne di massima importanza a causa della sua relazione nella ricerca della longitudine. In un'epoca di esplorazione su scala mondiale, la determinazione della posizione era diventata un problema cruciale e molti sforzi erano stati compiuti in tal

senso. La consapevolezza che un tempo assoluto standard per il mondo avrebbe permesso il calcolo della longitudine di una qualsiasi posizione confrontandola con l'ora locale fu una forza trainante fondamentale nello sforzo per mettere a punto orologi precisi. Ha inoltre portato ad una distinzione chiara nella mente della gente tra il tempo assoluto e il tempo locale.

Nel XVII secolo, Galileo scoprì un 'orologio' nel cielo che registra il 'tempo assoluto', vale a dire i tempi delle eclissi dei satelliti di Giove. Teoricamente questo ha fornito una soluzione al problema della longitudine, ma in pratica osservare le eclissi dei satelliti di Giove dal ponte di una nave era essenzialmente impossibile. Questo non fu il solo contributo di Galileo nello studio del tempo. Molto prima della sua scoperta sui satelliti di Giove, egli scoprì la proprietà fondamentale del pendolo. Mentre si recava nella cattedrale di Pisa, notò che una lampada dondolante nella cattedrale oscillava nello stesso tempo indipendentemente da quanto era grande lo spostamento. Naturalmente, ci si può ragionevolmente chiedere come abbia scoperto questo risultato dato che ai tempi di Galileo non vi era alcun dispositivo per misurare con precisione piccoli intervalli di tempo. Infatti Galileo utilizzò l'orologio biologico integrato nel suo corpo, ovvero il proprio polso per confrontare il tempo impiegato dal pendolo per oscillare. Galileo non sembrava aver capito che la sua scoperta potesse essere utilizzata per progettare un orologio preciso. Solo intorno al 1640 fece realizzare il primo orologio a pendolo.



Justus Sustermans-Galileo Galilei

Il primo a riuscire nella costruzione di un efficiente orologio a pendolo fu Huygens nel 1656. Questa invenzione portò ad una nuova precisione nella misurazione del tempo, le prime versioni infatti registravano errori di meno di 1 minuto al giorno. Poco dopo, con un design migliorato, Huygens fu in grado di costruire un orologio preciso entro 10 secondi in un giorno. Hooke utilizzò invece l'oscillazione naturale di una molla per controllare l'equilibrio di un orologio e qualche anno dopo anche lo stesso Huygens sperimentò un bilanciere a molla che può ancora essere trovato in orologi da polso meccanici.



Orologio astronomico di Strasburgo

Cartesio utilizzò principi matematici per spiegare il mondo e molti, compresi i primi membri della Royal Society di Londra, seguirono il suo esempio. Ciò, tuttavia, provocò una reazione tra i tanti che usavano la religione per spiegare il mondo e contestavano il metodo meccanico. Boyle, un grande sostenitore delle descrizioni matematiche del mondo, fornì una risposta affermando chiaramente che credeva in un Dio che può creare un universo meccanico che opera con certe leggi e diede come esempio l'orologio di Strasburgo. C'era un parallelo, disse Boyle, tra il

creatore dell'orologio di Strasburgo che ha costruito un meccanismo che ha funzionato da solo senza l'intervento del costruttore e l'universo creato da Dio che ha operato secondo le sue leggi, ma senza il suo intervento.

La versione finale dell'universo meccanico apparve nei '*Principia*' di Newton nel 1687. L'intera descrizione delle leggi di Newton dipendeva dal tempo e così egli esordì definendo il tempo come:

... assoluto, vero, tempo matematico, [che] di per sé, e per sua stessa natura, scorre uniformemente senza relazione a nulla di esterno.

Questo rappresentava una nuova idea nel concetto di tempo: non era più il tempo determinato dall'universo, ma piuttosto Newton postulò un orologio assoluto, esterno all'universo, che misura il tempo indipendentemente dall'universo stesso. Con le sue idee Newton mise il tempo in una nuova posizione in matematica. Non è più il tempo percepito come un'illusione dai filosofi antichi; a partire da ora infatti tutta la scienza verrà costruita su leggi basate completamente sul concetto di tempo.

Non tutti furono convinti dagli argomenti di Newton, tuttavia, e Leibniz si oppose alla concezione di tempo assoluto usando il ragionamento religioso. Egli credeva che Dio fosse razionale e quindi fosse necessaria una ragione per ogni azione. Così, come potrebbe Dio scegliere un istante per creare l'universo? Se non ci fosse alcun modo di distinguere un tempo da un altro, come Newton aveva sostenuto, Dio si sarebbe trovato di fronte a un'impossibile scelta per decidere razionalmente il momento della creazione. Leibniz utilizzò anche un altro argomento. Se due cose sono identiche sotto ogni aspetto quindi, affermò Leibniz, esse sono uno. Lo spazio e il tempo newtoniani sono identici ovunque, per loro stessa definizione. Per questo Leibniz ha affermato che due qualunque posizioni sono identiche così come due tempi qualunque.

Ci fu un'altra conseguenza interessante derivante dalle leggi di Newton sull'universo basate su precise leggi matematiche, e questo fu pienamente compreso da Laplace. Se si conosce l'esatta posizione e il moto di ogni particella nell'universo allora si può calcolare la sua posizione futura, e anche la posizione precedente. Laplace giustamente sostenne che, date le leggi della meccanica, il quadro completo del mondo passato e futuro è incapsulato nel mondo attuale.

Le leggi di Newton sono state rapidamente accettate perché hanno portato a previsioni corrette sul mondo. Il loro aspetto più sconcertante per quanto riguarda il tempo è che le leggi funzionano altrettanto bene se il tempo scorre in avanti o se il tempo scorre all'indietro. C'è una simmetria temporale completa nelle leggi, ma l'esperienza umana porta a credere che il tempo scorre sempre in avanti. Fu solo a metà del XIX secolo che la seconda legge della termodinamica fu proposta da Clausius. Questa fu la prima legge caratterizzata dalla mancanza di simmetria nella direzione del tempo (si veda l'aumento dell'entropia).

Nonostante le difficoltà che ancora esistevano nella comprensione del concetto di tempo, nell'ultima parte del XIX secolo si dovrebbe dire che il tempo universale di Newton si era dimostrato estremamente efficace nel fornire una base per le leggi che erano state osservate allo scopo di tenere fisso un alto grado di precisione.

2. Richiami di fisica e matematica

2.1. Moto in 2 e 3 dimensioni.

Localizzare un oggetto significa trovare la sua posizione relativa ad un punto di riferimento, che spesso è l'origine di un asse. La posizione può essere positiva o negativa, a seconda del lato in cui si trova rispetto all'origine, o zero se l'oggetto è nell'origine. Il verso positivo su un asse è il verso dei numeri crescenti; il verso opposto è il verso negativo. La posizione è quindi individuata da un **vettore posizione** $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, dove $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ e $z\vec{k}$ sono le componenti del vettore posizione r ; mentre x , y e z sono, oltre che le coordinate, le sue componenti scalari.

Se il vettore posizione di una particella cambia da r_1 a r_2 , il suo **spostamento** Δr è definito da $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Lo spostamento è chiaramente una grandezza vettoriale. Se questo spostamento è compiuto in un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, possiamo calcolare la **velocità vettoriale media** $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$; la velocità media non dipende dall'effettiva lunghezza percorsa, ma esclusivamente dalla sue posizioni iniziale e finale. La **velocità vettoriale istantanea** si ottiene dalla velocità media facendo tendere Δt a zero, ovvero $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. La velocità istantanea si può rappresentare come la pendenza, in quel particolare istante, della curva che rappresenta la variabile x in funzione di t . La variazione di velocità rispetto al tempo è nota come **accelerazione vettoriale media** $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$, l'**accelerazione vettoriale istantanea** sarà invece $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Il moto di una particella che si sposta su una circonferenza o su un arco di circonferenza di raggio r a velocità costante v è definito **moto circolare uniforme** con accelerazione a di ampiezza $a = \frac{v^2}{r}$. La direzione di a è il verso della circonferenza, a è infatti definita accelerazione *centripeta*. Il tempo richiesto perché la particella completi una circonferenza è $T = \frac{2\pi r}{v}$; T è chiamato *periodo di rivoluzione* o semplicemente *periodo*.

2.2. Forza.

La velocità di una particella, o di un corpo che si può schematizzare come una particella, può variare -il che equivale a dire che la particella accelera- quando su di essa agiscono una o più **forze**, spinte o trazioni, esercitate da altri oggetti. La *meccanica newtoniana* è lo studio delle relazioni tra l'accelerazione e le forze. La forza è una grandezza vettoriale; l'intensità della forza è definita in termini dell'accelerazione che essa imprime al kilogrammo campione. Una forza che accelera il corpo campione esattamente di 1 m/s^2 ha per definizione il modulo di $1N$. La direzione e il verso della forza coincidono con la direzione e il verso dell'accelerazione. La forza risultante o forza netta che agisce su un corpo è la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su quel corpo.

PRIMA LEGGE DI NEWTON. Se la forza netta agente su un corpo è nulla, quando tale corpo si trova in stato di quiete, rimane in tale stato, e quando si trova in movimento, continua a muoversi di moto rettilineo uniforme.

I sistemi di riferimento in cui vale la meccanica newtoniana sono detti **inerziali**.

La **massa** m di un corpo è la caratteristica di quel corpo che mette in relazione l'accelerazione del corpo alla forza che produce l'accelerazione.

SECONDA LEGGE DI NEWTON. La forza netta \vec{F}_{net} esercitata su un corpo avente massa m , è legata all'accelerazione \vec{a} del corpo dalla relazione $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$. Una forza di particolare interesse in questo studio è la **forza d'attrito** f , questa è infatti la forza esercitata su un corpo quando esso scivola o tenta di scivolare su una superficie. La forza di attrito è parallela alla superficie e diretta in modo tale da opporsi al movimento del corpo. Si noti che se il corpo non scivola, si parla di forza di attrito *statico*, se il corpo scivola sulla superficie si parla di forza di attrito *dinamico*.

Se il corpo non si muove, la forza di attrito statico f_s e la componente di \vec{F} parallela alla superficie hanno la stessa intensità e direzione; f_s è diretta in verso opposto a quello della componente di \vec{F} . L'intensità di f_s ha un valore massimo $f_{s,max}$ dato da $f_{s,max} = \mu_s F_N$, dove μ_s è il *coefficiente di attrito statico* ed F_N è l'intensità della forza normale. Se la componente di \vec{F} parallela alla superficie supera il valore di $f_{s,max}$, il corpo comincia a scivolare sulla superficie. L'intensità della forza di attrito a questo punto diminuisce rapidamente fino al valore f_k dato da $f_k = \mu_k F_N$, dove μ_k è il *coefficiente di attrito dinamico*.

TERZA LEGGE DI NEWTON. Se il corpo B esercita una forza \vec{F}_{BC} sul corpo C , anche C esercita su B una forza \vec{F}_{CB} , di modulo e direzione uguali, ma di verso opposto, cioè $\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}$.

2.3. Energia cinetica e Lavoro.

L'**energia cinetica** K associata al moto di una particella di massa m e di velocità v , purchè v sia ben al di sotto della velocità della luce, è $K = \frac{1}{2}mv^2$. Il **lavoro** L è l'energia trasferita da o a un corpo per mezzo di una forza applicata su di esso. Quando è trasferita verso il corpo, il lavoro è positivo; quando invece è trasferita dal corpo, il lavoro è negativo. Il lavoro compiuto da una forza costante F durante uno spostamento d della particella è $L = Fd \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Solo la componente lungo la direzione dello spostamento compie lavoro sul corpo.

La relazione tra la variazione ΔK di energia cinetica di un corpo e il lavoro totale svolto su di esso è $\Delta K = K_f - K_i = L$, nota come *teorema dell'energia cinetica*; in cui K_i è l'energia cinetica iniziale del corpo, K_f è l'energia cinetica dopo che è stato esercitato il lavoro.

La **potenza** è la 'rapidità' con la quale viene eseguito un lavoro. Se una forza sviluppa un lavoro L in un intervallo di tempo Δt , la *potenza media* è data dall'espressione $\bar{P} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$, mentre la *potenza istantanea* è definita come $P = \frac{dL}{dt}$. Se una forza \vec{F} agisce su un oggetto nella direzione che forma un angolo φ rispetto alla sua velocità istantanea v , la potenza istantanea vale $P = Fv \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Una forza è **conservativa** se il lavoro netto compiuto su una particella lungo un circuito chiuso è nullo. Si può anche dire che è conservativa quando il lavoro che svolge su una particella che si muove tra due punti non dipende dal percorso seguito. Si noti che la forza di attrito non è conservativa.

2.4. Centro di massa e quantità di moto.

Il centro di massa di un sistema di particelle distinte è definito come il punto le cui coordinate sono date da $r_{CDM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i$ dove M rappresenta la massa totale del sistema.

Per una singola particella definiamo una quantità vettoriale \vec{p} chiamata **quantità di moto**, o movimento lineare $\vec{p} = m\vec{v}$, e scriviamo la seconda legge di Newton in termini di quantità di moto $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Per un sistema di particelle queste relazioni diventano $\vec{P} = M\vec{v}_{CDM}$ e $\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{P}}{dt}$.

2.5. Rotazione e momento angolare.

Per descrivere la rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso, chiamato **asse di rotazione**, stabiliamo una linea di riferimento fissa rispetto al corpo, tracciata perpendicolarmente a quell'asse, e solidale con la rotazione del corpo. Misuriamo la **posizione angolare** θ di questa linea rispetto a una direzione fissa $\theta = \frac{s}{r}$ dove s è la lunghezza dell'arco di un cerchio di raggio r , sotteso dall'angolo θ . Un corpo che ruota attorno ad un asse di rotazione, variando la sua posizione angolare da θ_1 a θ_2 , effettua uno **spostamento angolare** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$. Se un corpo ruota compiendo uno spostamento angolare $\Delta\theta$ in un intervallo di tempo Δt , la sua **velocità angolare istantanea** $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. L'energia cinetica K di un corpo rigido rotante intorno a un asse fisso è data da $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ dove I è il **momento di inerzia** del corpo, definito come $I = \sum m_i r_i^2$ per un sistema di particelle distinte, e come $I = \int r^2 dm$ per un corpo la cui massa sia distribuita con continuità.

Il **momento** di una forza è l'azione di rotazione o di torsione intorno ad un asse, esercitata su un corpo da una forza F . Se F è applicata a un punto definito dal vettore di posizione \vec{r} rispetto all'asse, il momento della forza $\vec{\tau}$ è dato in modulo da $\tau = rF_t = r_\perp F = rF \sin \varphi$, dove F_t è la componente della forza perpendicolare a r e φ è l'angolo compreso fra r ed F . La variabile r_\perp rappresenta la distanza fra l'asse di rotazione e la retta sulla quale giace il vettore \vec{F} . Questa retta è chiamata **linea di azione** di \vec{F} e r_\perp è chiamato **braccio**.

2.6. Gravitazione e Oscillazioni.

Ogni particella nell'universo attira ogni altra particella con una **forza gravitazionale** di intensità pari a $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, nota come la legge di gravitazione di Newton, dove m_1 ed m_2 sono le masse delle due particelle ed r è la loro distanza. La **costante di gravitazione** G è una costante universale che vale $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

Ogni moto oscillatorio, o periodico, presenta una **frequenza** ν (numero di oscillazioni al secondo), che nel SI si misura in hertz. Il **periodo** T , tempo richiesto per una completa oscillazione, o **ciclo**, è legato alla frequenza dalla relazione $T = 1/\nu$.

Nel **moto oscillatorio semplice** lo spostamento $x(t)$ di una particella dalla sua posizione di equilibrio è descritto dall'equazione $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$, dove x_m è l'ampiezza dello spostamento, la quantità $(\omega t + \varphi)$ è la fase del moto e φ è la costante di fase. La pulsazione o frequenza angolare ω è legata al periodo e alla frequenza dalla relazione $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$. Derivando l'equazione dello spostamento rispetto al tempo si ottengono la velocità e l'accelerazione del moto armonico semplice.

Una particella in moto armonico semplice possiede, in ogni istante, un'energia cinetica $K = \frac{1}{2}k\nu^2$ e un'energia potenziale $U = \frac{1}{2}kx^2$. In assenza di attrito l'energia meccanica $E = K + U$ rimane costante, anche se K e U variano.

Sono esempi di moto armonico semplice il pendolo di torsione, il pendolo semplice, e il pendolo reale. Per piccole oscillazioni i loro periodi sono rispettivamente $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$.

L'energia meccanica E di un sistema oscillante reale diminuisce nel corso delle oscillazioni perché forze esterne, come la resistenza del mezzo, ostacolano le oscillazioni e trasformano energia meccanica in energia termica. L'oscillatore e il suo moto sono definiti smorzati. Se esiste una forza smorzante $F_{sm} = -bv$, dove v è la velocità dell'oscillatore e b la costante di smorzamento, lo spostamento dell'oscillatore è dato dalla $x(t) = x_m e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega_{sm}t + \varphi)$, dove ω_{sm} , pulsazione dell'oscillatore smorzato, è $\omega_{sm} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$. Se b è piccola, l'energia meccanica dell'oscillatore è data da $E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-\frac{bt}{m}}$.

Se una forza oscillante esterna di frequenza angolare ω_f è impressa a un sistema oscillante avente una pulsazione *naturale* ω , il sistema oscillerà con frequenza angolare ω_f . L'ampiezza della velocità del sistema raggiunge il massimo valore quando è $\omega = \omega_f$, condizione definita di risonanza. Anche l'ampiezza x_m dello spostamento del sistema raggiunge il valore massimo (approssimativamente) per la stessa condizione.

2.7. Geometria differenziale delle curve.

Una linea piana può essere definita o mediante proprietà che caratterizzano i suoi punti, cioè come luogo geometrico, oppure come traiettoria di un punto che si muove su un piano secondo una data legge; da ciò seguono, fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathbb{R}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, le seguenti rappresentazioni della curva:

- come luogo dei punti $P(x, y)$ le cui coordinate soddisfano un'equazione cartesiana del tipo $f(x, y) = 0$;
- come traiettoria di un punto $P(t)$ le cui coordinate sono espresse in funzione di un parametro t $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Fissiamo un sistema di riferimento ortonormale dello spazio $\mathbb{R}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e consideriamo una curva parametrizzata L , cioè una curva descritta dal punto $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$, dove t varia in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$; la data rappresentazione di L individua in particolare un *senso di percorrenza* di L , concorde con la crescita del parametro t .

Si può associare alla curva parametrizzata L una funzione $\mathbf{u}(t)$, definita su I ed a valori nello spazio V_3 dei vettori ordinari come segue $\mathbf{u}(t) = P(t) - O = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ e si ha corrispondenza biunivoca tra punti $P(t)$ e vettori $\mathbf{u}(t)$.

3. Matematica dell'orologio: Ingranaggi e rotismo

Ci si può dunque chiedere cosa sia il tempo. Come anche Sant'Agostino aveva appurato, la definizione di 'tempo' è più ostica di quanto si possa immaginare.

Lasciando ad altri i discorsi filosofici, vorrei far notare che quando si pensa al tempo, ci si focalizza subito sugli strumenti di misurazione di questo, ed il più conosciuto è probabilmente l'orologio.

In questo studio vorrei concentrarmi sull'orologio meccanico; ed in particolare sul suo fascino rotante, caratterizzato in primis dal rotismo.

3.1 RUOTE DI FRIZIONE

Generalità: Per *macchina* si intende un insieme di organi, tra loro collegati, aventi come scopo quello di trasmettere *potenza meccanica*. Lo schema classico è quello di un motore che, tramite una trasmissione, trasporta la potenza ad un utilizzatore. La potenza può essere trasmessa tramite moto rotatorio (es. alberi rotanti), nel qual caso è espressa dal prodotto del momento motore per la velocità angolare:

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

oppure tramite moto di traslazione, nel qual caso è espressa dal prodotto della forza per la velocità di traslazione:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

In ogni caso, tale potenza solo teoricamente si trasmette integralmente dal motore all'utilizzatore. Di fatto una parte di questa viene perduta a causa di attriti e dissipazioni varie. Ciò fa sì che la potenza utile sia inferiore a quella motrice e il loro rapporto è il *rendimento meccanico* della trasmissione sempre inferiore all'unità:

$$\eta = \frac{P_u}{P_m}$$

dove appunto P_u è la potenza utile e P_m la potenza motrice. L'albero motore entra nella trasmissione con un momento motore \vec{M}_m e una velocità angolare $\vec{\omega}_m$ mentre l'albero in uscita, che è quello dell'utilizzatore, avrà un momento resistente \vec{M}_r e una velocità angolare $\vec{\omega}_u$. Si definisce *rapporto di trasmissione* il rapporto tra il modulo della velocità angolare del motore e quello della velocità angolare dell'utilizzatore o, equivalentemente, tra i rispettivi numeri di giri:

$$i = \frac{\omega_m}{\omega_u} = \frac{n_m}{n_u}.$$

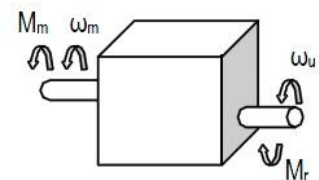
Nel caso di funzionamento ideale, cioè in assenza di attriti, avremo che la potenza motrice sarà integralmente trasferita e quindi risulterà uguale a quella utile:

$$P_m = \vec{M}_m \cdot \vec{\omega}_m = \vec{M}_u \cdot \vec{\omega}_u = P_u$$

ciò implica che:

$$i = \frac{\omega_m}{\omega_u} = \frac{M_u}{M_m},$$

cioè, per esempio, in una trasmissione riduttrice mentre si abbasserà la velocità angolare in uscita aumenterà proporzionalmente il momento.



Ruote di frizione: Un esempio semplice di trasmissione tra due alberi non molto distanti tra loro e quello delle ruote di frizione. In fig. 1 riportiamo lo schema di tale trasmissione, costituita da due ruote di diametri D_1 e D_2 , la prima sull'albero motore con velocità angolare $\vec{\omega}_m$ e momento motore \vec{M}_m , la seconda sull'albero condotto con velocità angolare $\vec{\omega}_u$ e momento resistente \vec{M}_R . Il moto può trasmettersi grazie all'aderenza che fa nascere una forza tangenziale \vec{T} in seguito alla forza \vec{R} con cui vengono spinte le ruote l'una contro l'altra, se f è il coefficiente d'attrito, sarà:

$$\vec{T} = f \vec{R}.$$

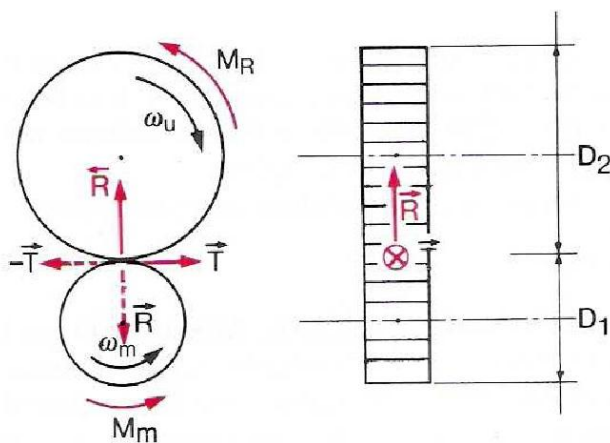


Fig. 1 – Ruote di Frizione

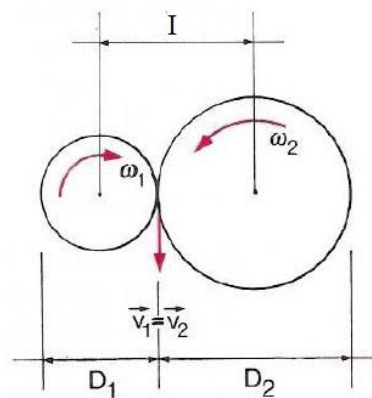


Fig. 2

Nella fig. 2, dove abbiamo indicato con $I = \frac{D_1 + D_2}{2}$ l'interasse, si pone in evidenza che, in assenza di slittamento, la velocità periferica del punto di contatto sulla ruota 1 è uguale a quella del punto di contatto sulla ruota 2, $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$. Ricordando che possiamo esprimere \vec{v} come il prodotto di ω e di r , inteso come *distanza radiale*; si avrà $\omega_1 \frac{D_1}{2} = \omega_2 \frac{D_2}{2}$, e cioè :

$$i = \frac{\omega_m}{\omega_u} = \frac{D_2}{D_1},$$

il rapporto di trasmissione dipende quindi dal diametro delle due ruote. Quest'ultima formula, insieme a quella dell'interasse ci consente di dimensionare correttamente i diametri delle due ruote.

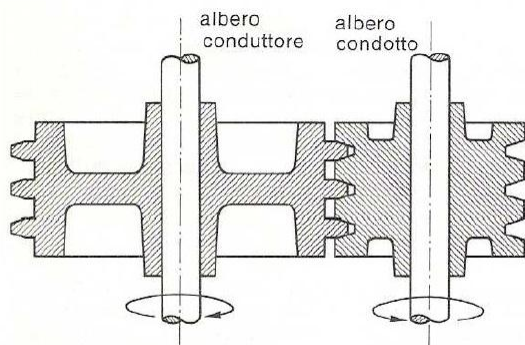


Fig. 3 – Ruote di Frizione con gole

In pratica, le ruote di frizione hanno un campo d'impiego piuttosto limitato, pur avendo il vantaggio della silenziosità e della regolarità della trasmissione, poiché sono utilizzabili solo per potenze modeste. Infatti per potenze elevate deve risultare elevata la forza $\vec{T} = f \vec{R}$ ma, poiché il coefficiente d'attrito per i materiali comunemente impiegati (acciaio, ghisa) è piuttosto basso ($f = 0,10 \div 0,15$), occorrerebbero spinte \vec{R} molto elevate con conseguenti eccessive sollecitazioni sugli

alberi, sui perni, sui cuscinetti, ecc.

Un modo per migliorare l'aderenza, aumentando sensibilmente il coefficiente d'attrito, è quello di realizzare sulle ruote delle *gole* che si incuneano durante il moto (fig. 3). In tal caso, detto α l'angolo di semiapertura della gola si ha:

$$\vec{T} = \frac{f}{\sin \alpha} \vec{R} .$$

3.2 RUOTE DENTATE

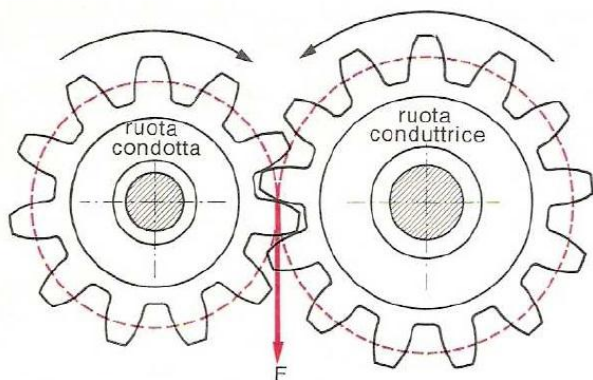


Fig. 4 – Principio di funzionamento delle ruote dentate

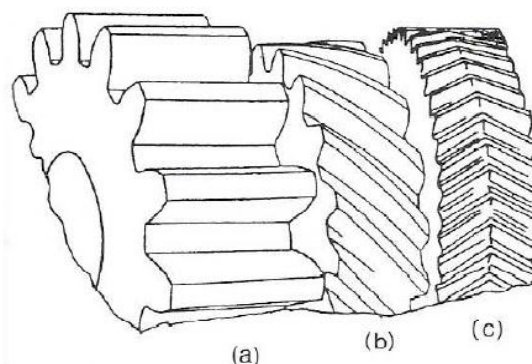


Fig. 5 – Tipi di dentatura

Generalità: Abbiamo visto che con le ruote di frizione si hanno dei limiti nella trasmissione di potenze elevate a causa delle proibitive sollecitazioni radiali cui devono essere sottoposte per garantire l'aderenza. A partire da due ruote di frizione ideali, rappresentate dalle circonferenze tratteggiate nella fig. 4, immaginiamo di ricavare sulle loro superfici esterne una serie di denti, alternati a spazi vuoti, che durante il moto si compenetrino facilmente; è evidente come, in tal caso, la trasmissione della potenza non è più affidata all'attrito ma alla spinta che ciascun dente della ruota motrice esercita su quelli della ruota condotta. In tal modo, purché si costruiscano denti sufficientemente robusti, sarà possibile trasmettere potenze anche grandi.

Si definisce *ingranaggio* un meccanismo composto da due ruote dentate una delle quali (motrice) trasmette il moto all'altra (condotta). A seconda dell'andamento dell'asse dei denti, la dentatura può essere *diritta* (fig. 5a), *elicoidale* (fig. 5b) o *bieloidale* (fig. 5c).

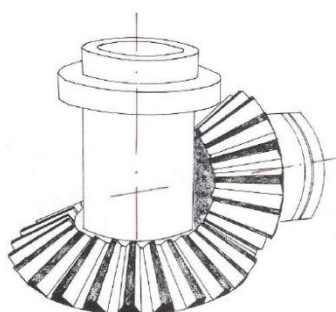


Fig. 6 – Ruote coniche

Con gli ingranaggi si può trasmettere il moto, oltre che tra due alberi con *assi paralleli* (con ruote cilindriche a denti dritti e a denti elicoidali), anche tra alberi ad *assi concorrenti* (fig. 6: utilizzando ruote coniche sia a denti dritti che elicoidali), tra alberi ad *assi sghembi* (fig. 7a: con ruote a denti elicoidali; fig. 7b: con coppie di ingranaggi conici; fig. 7c: con meccanismo vite senza fine ruota elicoidale).

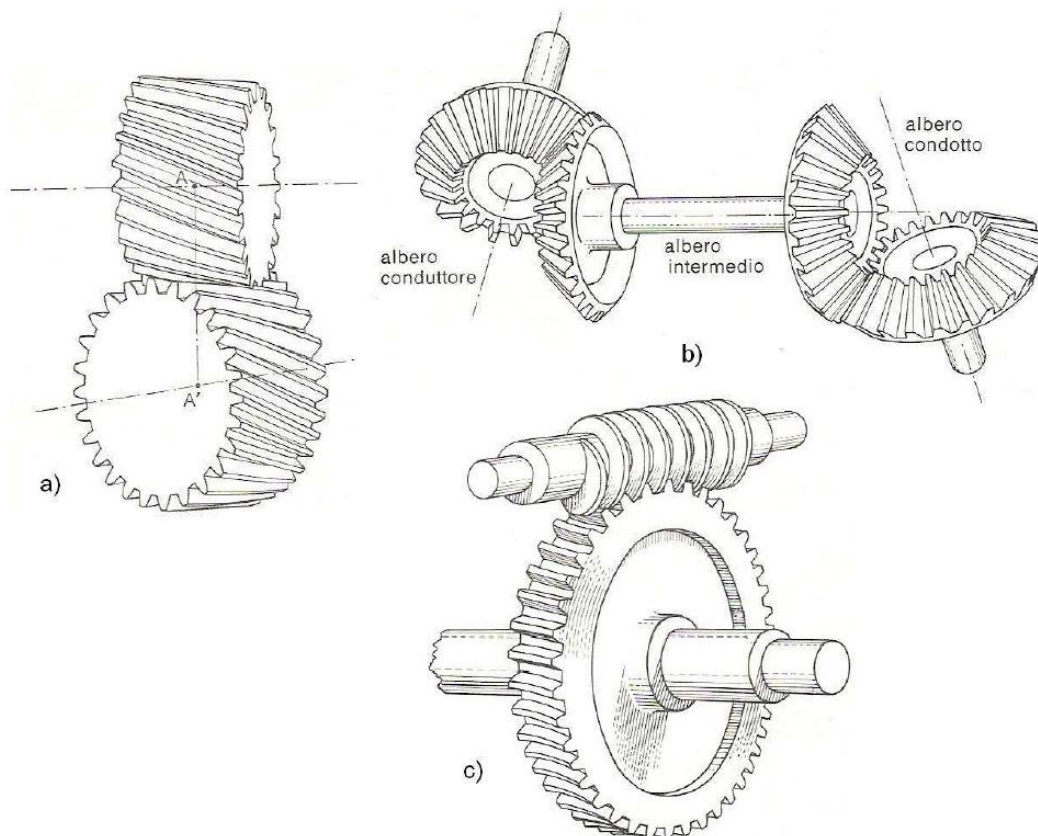


Fig. 7 –Trasmissione tra assi sghembi: a) con ruote a denti elicoidali; b) con coppie di ingranaggi conici; c) con meccanismo vite senza fine/ruota elicoidale

Inoltre è possibile operare la trasformazione del moto da rotatorio a traslatorio con il meccanismo pignone/cremagliera (fig. 8).

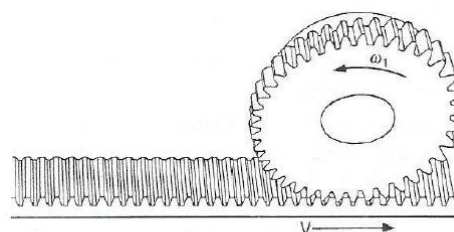


Fig. 8 – Accoppiamento pignone/cremagliera

Dato un ingranaggio, si definisce *pignone* la ruota dentata di diametro minore e *ruota* quella di diametro maggiore, mentre l'*interasse* a è la distanza tra gli assi delle due ruote. Dette $\vec{\omega}_1$ la velocità angolare del pignone ed $\vec{\omega}_2$ la velocità angolare della ruota; si definisce, in modo analogo al rapporto di trasmissione, il *rapporto di ingranaggio* u il rapporto

$$u = \frac{\vec{\omega}_1}{\vec{\omega}_2}.$$

Il rapporto d'ingranaggio coincide con il rapporto di trasmissione quando il pignone è sull'albero motore cioè quando abbiamo un riduttore.

Caratteristiche della dentatura: Con riferimento alla fig. 9, in una ruota dentata, si definisce:

- diametro primitivo d_p , il diametro della ruota di frizione fittizia capace di trasmettere il moto con lo stesso rapporto di trasmissione della ruota dentata;
- testa del dente, la parte di esso compresa tra la circonferenza primitiva e la circonferenza esterna (detta anche di troncatura o di testa);
- piede del dente, la parte di esso compresa tra la circonferenza interna (detta anche di fondo o di base) e la circonferenza primitiva;
- passo della dentatura p , la distanza fra gli assi di due denti consecutivi, misurata in corrispondenza della circonferenza primitiva; se indichiamo con z il numero di denti della ruota, il passo della dentatura sarà dato da $p = \frac{\pi d_p}{z}$.

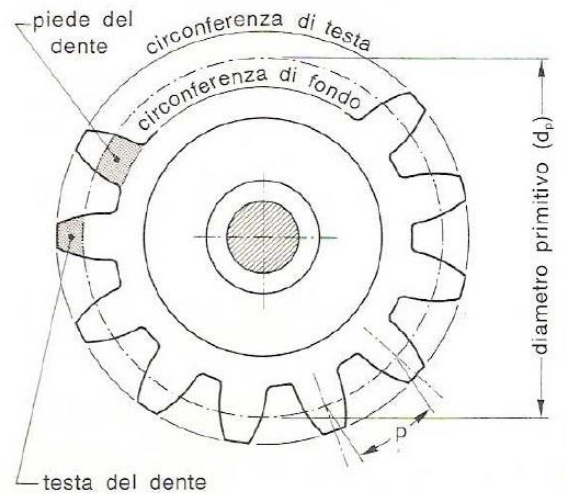


Fig. 9 – Caratteristiche della dentatura

Perché l'ingranamento sia regolare il passo del pignone deve essere uguale al passo della ruota, ovvero

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{\pi d_{p1}}{z_1} = \frac{\pi d_{p2}}{z_2} \Rightarrow \frac{d_{p1}}{z_1} = \frac{d_{p2}}{z_2}$$

e quindi, per il rapporto di ingranaggio valgono tutti i seguenti rapporti:

$$u = \frac{\vec{\omega}_1}{\vec{\omega}_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

si noti che tale relazione vale per qualunque tipo di ingranaggio.

Con riferimento alla seguente fig. 10, detta C_e la circonferenza esterna di diametro d_e , C_i la circonferenza interna di diametro d_i , C_p la circonferenza primitiva di diametro d , avremo ancora:

- altezza del dente, $h = \frac{d_e - d_i}{2}$;
- addendum h_a , ovvero la distanza tra la circonferenza primitiva e la circonferenza di troncatura esterna;
- dedendum h_d , ovvero la distanza tra la circonferenza primitiva e la circonferenza di troncatura interna;
- gioco di testa, $g = h_d - h_a$;
- spessore s ed il vano v , rispettivamente le lunghezze, sulla primitiva, della parte piena del dente e della parte vuota tra un dente e l'altro (la loro somma è uguale al passo $p = s + v$);
- larghezza del dente b , in senso parallelo all'asse;
- fianco del dente, corrispondente alla superficie ombreggiata in fig. 10.

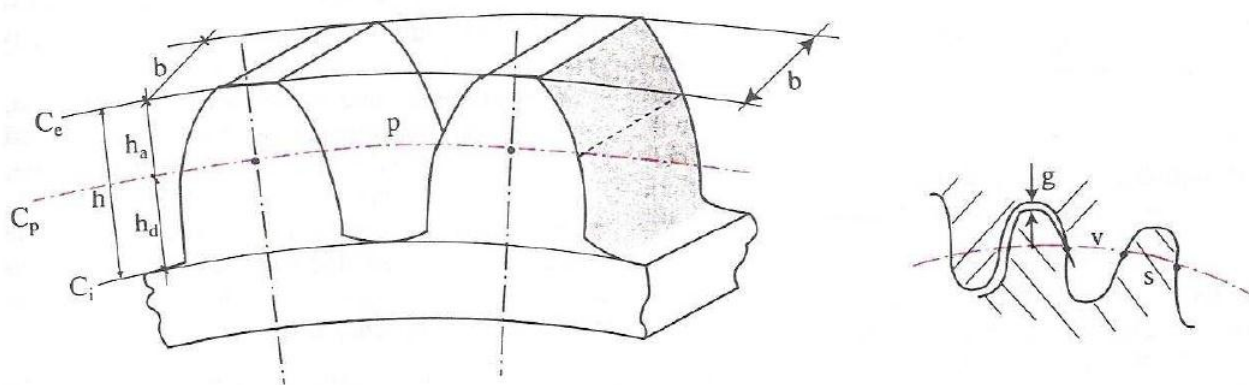


Fig. 10 – Altre caratteristiche della dentatura

Il modulo: Il passo, precedentemente definito, è un elemento caratteristico della dentatura che un tempo veniva utilizzato come riferimento per il dimensionamento di tutte le altre parti. Tuttavia il passo presenta l'inconveniente di essere un numero con la virgola in quanto affetto dalla irrazionalità del π . Allora è stato introdotto il modulo m definito come il rapporto tra il diametro primitivo e il numero dei denti:

$$m = \frac{d}{z}.$$

Il calcolo delle ruote dentate si basa sul calcolo del modulo individuato il quale si passa al proporzionamento modulare secondo il seguente schema:

CARATTERISTICA	FORMULA
Passo	$p = \pi m$ (i)
Diametro primitivo	$d = m z$ (ii)
Diametro esterno	$d_e = d \pm 2m = m(z \pm 2)$ (iii)
Diametro interno	$d_i = d_e \pm 2h = d_e \pm 2.25m$ (iv)
Addendum	$h_a = m$ (v)
Dedendum	$h_d = 1.25m$ (vi)
Altezza del dente	$h = h_a + h_d$ (vii)
Spessore e vano	$s = v = \pi m / 2$ (viii)
Larghezza	$b = \lambda m$ (ix)
Gioco	$g = m / 4$ (x)
Interasse	$a = m \frac{z_1 \pm z_2}{2}$ (xi)

Normalmente $\lambda = \frac{b}{m}$ viene assunto pari a 10 nelle ruote a denti dritti, mentre può assumere valori molto maggiori in caso di denti elicoidali o bielicoidali. I segni negativi nelle formule dove compare \pm vanno utilizzati nel caso di ingranaggi interni.

Linea di ingranamento: Nella fig.12 viene rappresentato, in tre fasi successive, il periodo in cui due denti D_1 e D_2 delle due ruote di un ingranaggio sono in contatto durante l'ingranamento. Nella fig.12 a) si vedono i due denti nel momento in cui iniziano il contatto nel punto M , che non appartiene a nessuna delle due primitive, mentre il punto R , prolungamento del raggio O_1M fino alla circonferenza primitiva c_{p1} , è proprio il punto sulla primitiva in cui inizia il contatto. Quando la primitiva c_{p1} avrà ruotato da R a C , il punto di contatto si troverà a coincidere con il punto di tangenza tra le due primitive (fig.12 b)). Si nota che, nel

frattempo, (fig.12 a)) il punto M immaginato appartenente alla prima ruota si troverà in M' mentre se lo immaginiamo appartenente alla seconda ruota si troverà in M'' . Ciò vuol dire che il punto di contatto sul profilo del dente D_1 avrà percorso lo spazio da M' a C mentre sul profilo del dente D_2 avrà percorso, nello stesso tempo, lo spazio maggiore da M'' a C ; ossia si è verificato uno strisciamento tra le superfici dei due denti con conseguenti problemi di usura. I due denti avranno l'ultimo contatto nel punto N (fig.12 c)) mentre sulla circonferenza primitiva c_{p2} , della seconda ruota, il corrispondente punto sarà S .

Pertanto, durante tutto il periodo dell'ingranamento, i punti di contatto si saranno spostati da M ad N sulla linea MCN (fig. 12 c)) detta linea di *ingranamento*, mentre le circonferenze primitive avranno percorso complessivamente (fig. 12 b)) l'arco RCS detto arco d'azione e, in particolare, l'arco da R a C è detto arco di accesso mentre l'arco da C a S è detto arco di recesso.

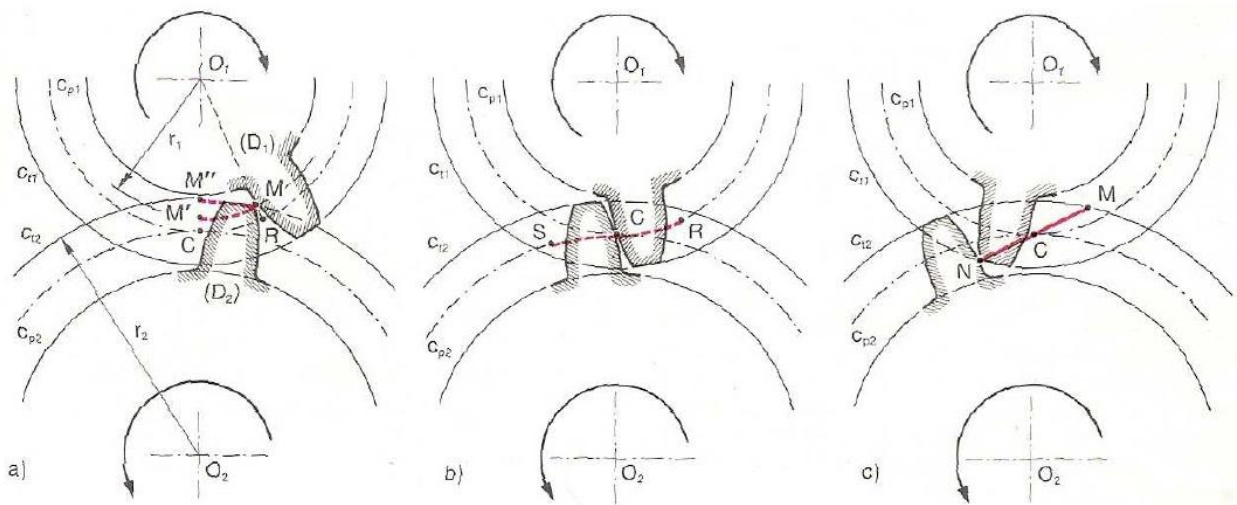


Fig.12 – Linea d'ingranamento ed arco d'azione

Vale la pena sottolineare che, in una coppia di ruote dentate, l'arco d'azione deve essere maggiore del passo altrimenti il contatto tra due denti cesserebbe prima dell'inizio del nuovo contatto tra i due denti successivi.

3.3 ROTISMI PER OROLOGI

Quando un dente ingrana con un pignone, spinge il pignone nella sua direzione di moto, trasferendo ad esso la forza. La direzione della forza, che agisce sul pignone, può essere vista come una linea tangente alla circonferenza primitiva. Allo scopo di minimizzare la perdita di potenza, si tenta di far ingranare i denti nella maniera più dolce possibile, come se fossero due dischi che rotolano l'uno sull'altro. Il progetto dei denti dei due rotismi deve essere tale da massimizzare l'efficienza della forza trasferita dalla ruota al pignone.

Il rapporto tra i diametri di due ruote, che ingranano, deve essere analogo al rapporto tra i numeri dei denti: in altre parole, se una ruota ha un diametro di 10 cm e 100 denti, e la seconda ha un diametro di 1 cm, per ingranare dovrà avere 10 denti.

La forza, che si scambiano i denti delle due ruote, sarà perpendicolare alla superficie di contatto. Se il punto di contatto non forma un angolo di novanta gradi con la forza, ciò comporta una perdita di potenza. Pertanto, il punto di contatto deve formare un angolo di 90° con la direzione della forza e quest'ultima può essere vista come la retta tangente alla circonferenza primitiva; conseguentemente, la parte bassa del dente, dedendum, deve essere parallela al raggio che unisce il centro del cerchio al punto di contatto. Se il raggio della circonferenza fosse grande, i fianchi del dente sembrerebbero paralleli, ma in realtà non lo sono; ciò è facilmente visibile nei pignoni, che hanno un raggio molto più piccolo, ma in realtà è lo stesso, in quanto i due rotismi sono creati sullo stesso principio. Durante il reciproco contatto tra denti, il fattore principale da considerare è l'angolo di rotazione dei due ingranaggi, che è maggiore per il pignone e, pertanto, maggiore attenzione dovrà essere prestata a questo elemento.

La ruota, premendo oltre il punto medio dell'impulso, determinerà, ovviamente, una perdita di potenza causata dal vettore della forza. La direzione dell'impulso, ricevuto dal pignone per il suo moto, non sarà utile, in quanto una parte di essa, non essendo tangenziale, verrà persa. Se l'angolo tra le due direzioni in esame è molto piccolo, conseguentemente anche la perdita di potenza sarà molto bassa. Inoltre, maggiore sarà il numero dei denti del pignone, minore sarà l'angolo di relativa rotazione.

L'interazione di due denti della ruota può essere divisa in due fasi: impegno e disimpegno. Durante la prima fase, vi sarà maggior attrito e perdita di potenza rispetto a quello che accade nella seconda fase; pertanto, il profilo dei denti del pignone dovrà essere disegnato in modo tale che il primo dente non disimpegni, finché il dente successivo abbia raggiunto il punto medio di contatto. Ecco la ragione per la quale i denti della ruota si allungano oltre il cerchio primitivo.

Se avvenisse un disimpegno del dente del pignone prima che il successivo sia giunto al punto medio di contatto, quest'ultimo riceverebbe la forza della ruota come se questa fosse posizionata più vicino (il suo dente penetrerebbe maggiormente), con conseguente effetto repulsivo delle due ruote, che agirebbe sui perni, causando, così, un effetto di usura dei denti e tutti i problemi strutturali ed elastici che ne derivano.

È, pertanto, importante, nella progettazione del treno del tempo, utilizzare pignoni con un numero di denti pari a 12 o maggiore, e disegnare il dedendum, dei suoi denti, con fianchi paralleli ai raggi. In ogni momento, la rotazione angolare deve essere proporzionata al conteggio del tempo; se la ruota che dà l'impulso, la conducente, ruotasse più velocemente in un istante rispetto all'altro, mentre la frequenza di rotazione del pignone rimane costante, il trasferimento di energia non sarebbe costante; se il mutuo spostamento non fosse dolce e continuo, il tutto si ripercuoterebbe sul tempo. Al fine di ottenere un dolce passaggio di energia attraverso la coppia di ingranaggi, il profilo dell'addendum di ogni dente deve essere tale da simulare la rotazione reciproca di due dischi, in maniera tale da garantire una velocità angolare costante durante il loro ingranamento; i due profili devono essere coniugati. Si faccia riferimento a quanto segue per la definizione di profili coniugati.

Profilo del dente: I profili dei denti sono *coniugati*, cioè:

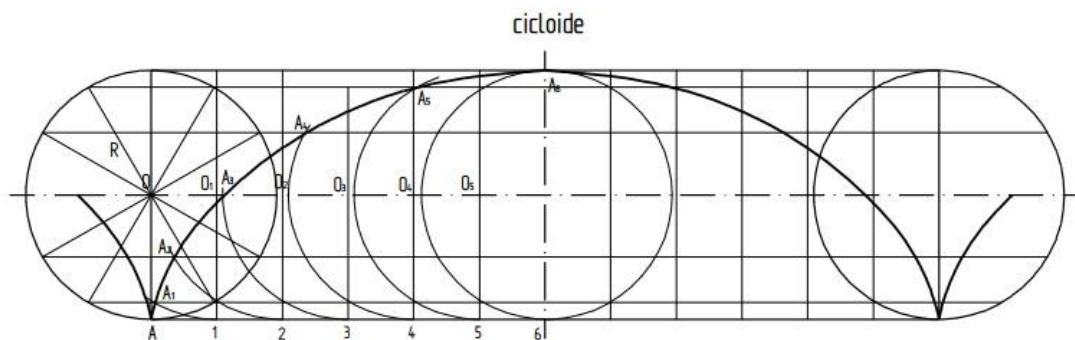
- le tangenti ai profili nel punto di contatto devono coincidere; per conseguenza coincidono anche le normali;
- la comune normale deve passare per il centro di istantanea rotazione. In questo modo, la velocità relativa dei profili risulta puramente tangenziale (strisciamento), e non ha componente normale (tendenza al distacco o all'urto). Lo strisciamento risulta proporzionale alla distanza tra punto di contatto e centro di istantanea rotazione; non può essere del tutto annullato, ma può essere ridotto al minimo, facendo in modo che il contatto avvenga sempre nei pressi del centro di istantanea rotazione. In pratica, ciò si ottiene riducendo l'altezza dei denti, e quindi aumentandone il numero, compatibilmente con la loro resistenza.

Le due forme usuali dei profili sono:

- profilo cicloidale;
- profilo ad evolvente.

Una coppia di profili coniugati si ottiene geometricamente facendo rotolare senza strisciamento una curva ausiliaria, detta rulletta, una volta su una superficie primitiva (all'esterno) e una volta sull'altra (all'interno). Si hanno, così, le sporgenze della prima ruota e le rientranze della seconda; lo stesso procedimento, con posizioni invertite della rulletta, si userà per determinare le rientranze della prima ruota e le sporgenze della seconda. Nel profilo cicloidale la rulletta è una *circonferenza*; nel profilo ad evolvente la rulletta è una *retta*; in quest'ultimo caso, la rulletta rotola non sulla primitiva, ma su una retta ausiliaria, interna alla primitiva, detta circonferenza di base.

Profilo cicloidale. Si ricordi che la cicloide è la curva geometrica descritta da un punto di una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta.



La rappresentazione parametrica della cicloide passante per l'origine generata da un cerchio di raggio r è data da:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}.$$

La cicloide è una funzione continua ed è differenziabile ovunque tranne sulle cuspidi. Dove è differenziabile soddisfa l'equazione differenziale

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r-y}{y}.$$

Siano m_1 ed m_2 le due primitive: assumiamo una circonferenza e come curva rotolante, cioè come ipociclo per la m_1 , e come epiciclo per la m_2 (Figura 13). Per quanto è stato dimostrato, le due rullette s_1 e s_2 (ipocicloide ed epicicloide) di un suo punto (per esempio del punto O), costituiscono due profili coniugati quando questa circonferenza rotola rispettivamente sulla m_1 e sulla m_2 . Di questi profili potremo utilizzare

Fig. 13 - Profili cicloidali: determinazione dei profili

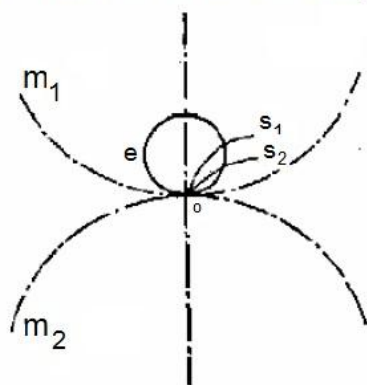
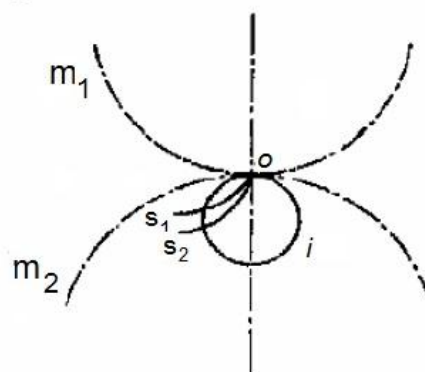


Fig. 14 - Profili cicloidali: determinazione dei profili



due archi per profilare due denti coniugati. Così facendo, non potremmo ottenere che denti tutti sporgenti dalla superficie primitiva per la ruota m_2 , e tutti incavati dentro la superficie primitiva per la ruota m_1 , mentre conviene che i denti siano in parte sporgenti ed in parte incavati, perché si discostino il meno possibile dalla superficie primitiva, essendo lo strisciamento dei profili tanto minore quanto meno essi si allontanano dalla primitiva. Per completare i denti assumeremo, perciò, un'altra circonferenza i (Figura 14) simmetrica alla precedente rispetto ad O come epiciclo (per la m_1) e come ipociclo (per la m_2): le traiettorie s_1 ed s_2 di un suo punto (per es. del punto O), quando questa circonferenza i rotola rispettivamente sulla m_1 e sulla m_2 , costituiscono due profili coniugati e anche di essi potremo utilizzare due archi per completare i profili dei denti, che quindi risultano completi di costa e di fianco.

Fig. 15 - Profili cicloidali

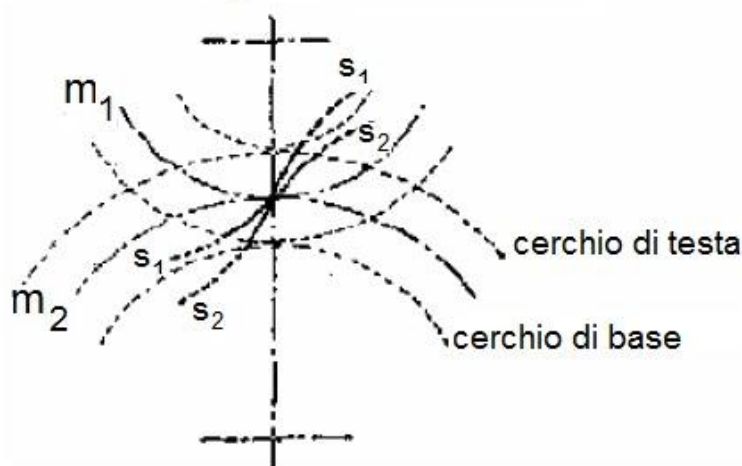
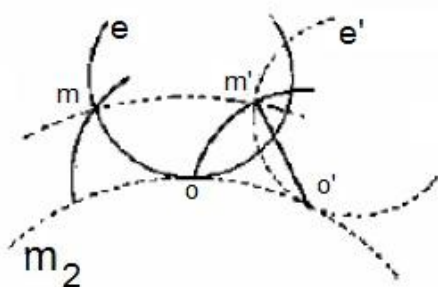


Fig. 16 - Linea di imbocco



Gli archi di tipo ad epicicloide che si utilizzano per il profilo dei denti saranno per ciascuna ruota limitati dal cerchio di base e dal cerchio di testa (Figura 15). I profili dei denti così ottenuti presentano, in corrispondenza della primitiva, un punto di flesso che costituisce una caratteristica del profilo cicloidale, dal quale generalmente esso si può riconoscere sulle ruote già costruite. La *linea d'imbocco* nei denti a profilo cicloidale è un arco dell'epiciclo. Infatti, siano m_1 la primitiva ed e l'epiciclo (Figura 16): consideriamo una posizione successiva e' dell'epiciclo, cui corrisponde l'arco OM' di epicicloide descritta dal punto O ed il punto O' di tangenza con la primitiva. La normale in M' all'epicicloide è, per la proprietà dell'epicicloide, la $M'O'$. Durante la rotazione della ruota m_2 , il punto M' descrive la circonferenza

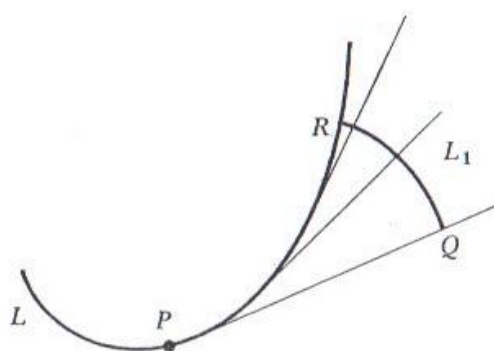
punteggiata: esso verrà a contatto col punto corrispondente del profilo coniugato dell'altra ruota quando,

per proprietà di profilo coniugato, la normale condotta per esso al profilo passerà per il centro O di istantanea rotazione. Ma la normale condotta per M al profilo epicicloidale è, come si è detto, la $M'O'$ ed il punto O' verrà, durante la rotazione della ruota m , a coincidere con O , quando M' verrà a coincidere col punto M dell'epiciclo tangente in O alla primitiva.

Costanza del rapporto di trasmissione, profilo ad evolvente e forze scambiate tra i denti. Abbiamo visto come, rispetto alle ruote di frizione, le ruote dentate presentano l'inconveniente di un leggero strisciamento tra i fianchi dei denti a contatto. Un altro problema si potrebbe presentare per il rapporto di trasmissione; infatti, mentre nelle ruote di frizione il punto di contatto C non cambia mai, e quindi il rapporto di trasmissione si mantiene costante durante il moto, nelle ruote dentate il punto di contatto si muove, come abbiamo visto, lungo la linea d'ingranamento e quindi, variando continuamente la distanza tra esso ed i centri delle due ruote, potrebbe scaturirne la variabilità, durante il moto, del rapporto di trasmissione.

Per evitare questo inconveniente e far sì che anche per le ruote dentate il rapporto di trasmissione si mantenga costante è necessario operare una scelta opportuna dei profili dei fianchi dei denti ingrananti. Si può dimostrare, infatti, che se i profili sono curve capaci di realizzare la condizione che in ogni istante dell'ingranamento la normale ad essi nel punto di contatto passi per il punto C di tangenza tra le due primitive, allora certamente il rapporto di trasmissione sarà costante. Tale condizione di perpendicolarità viene certamente soddisfatta dai *profili coniugati* che si possono ottenere assegnando un profilo arbitrario al dente di una ruota ed ottenendo, costruttivamente, quello sul dente dell'altra come *inviluppo* generato dal primo nel suo moto relativo intorno alla seconda ruota.

In pratica, il metodo dell'inviluppo è il principio di funzionamento su cui si basano le moderne dentatrici con cui vengono costruite le ruote dentate, mentre, per semplicità costruttiva e per favorire l'intercambiabilità, si è deciso di evitare l'arbitrarietà della scelta utilizzando, per tutte le ruote dentate, come profilo una curva particolare che è l'evolvente di cerchio.



Si definisce **evolvente** di una curva L ogni curva L_1 che interseca ortogonalmente le rette tangenti ad L ; in tal caso L si dice **evoluta** di L_1 .

Supponiamo che L sia descritta dal punto $P = P(s)$, dove s è un'ascissa curvilinea di L ; se Q è il punto di un'evolvente L_1 che appartiene alla tangente ad L nel punto P , indicando con \mathbf{t} il versore tangente ad L in P si ha:

$$Q(s) = P(s) + h(s)\mathbf{t}$$

dove $h(s)$ è la funzione che si deve determinare affinché Q descriva l'evolvente L_1 ; si noti in particolare che s non risulterà in generale ascissa curvilinea per la linea L_1 .

Derivando quest'ultima equazione ed imponendo che $\frac{dQ}{dt} \cdot \mathbf{t} = 0$, si ottiene

$$\left(\frac{dP}{ds} + \frac{dh}{ds} \mathbf{t} + h \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right) \cdot \mathbf{t} = 0$$

e quindi: $\frac{dh}{ds} + 1 = 0$ che, per integrazione, comporta $h(s) = -(s + c)$, dove c è una costante arbitraria. Al variare di c si ottengono infinite evolventi della curva L , descritte dal punto

$$Q(s) = P(s) - (s + c)\mathbf{t}.$$

Una notevole proprietà delle evolventi è la seguente: sia R il punto in cui un'evolvente L_1 di L incontra la curva L e sia Q il punto di L_1 appartenente alla tangente in P ad L ; la lunghezza dell'arco PR coincide con la lunghezza del segmento PQ . Pertanto il punto Q può essere ottenuto "distendendo" l'arco PR lungo la tangente ad L in P .

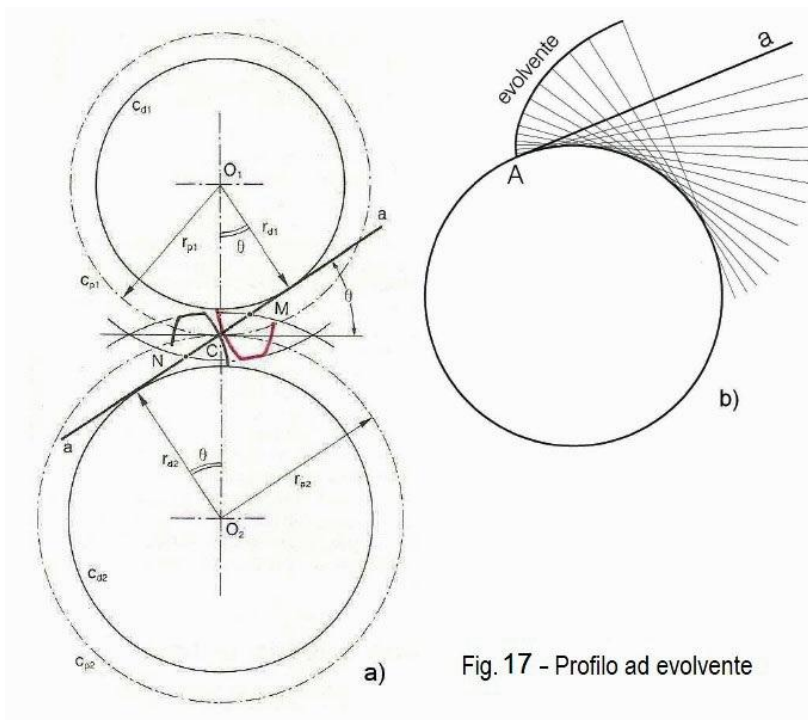


Fig. 17 - Profilo ad evolvente

primitive di raggi r_{p1} ed r_{p2} pertanto risulterà

$$\begin{aligned} r_{d1} &= r_{p1} \cos \vartheta \\ r_{d2} &= r_{p2} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Dalla figura si vede, inoltre, che tale retta contiene il segmento MCN , definito precedentemente come linea di ingranamento, luogo di tutti i punti di contatto, e quindi sempre perpendicolare ai profili, per cui rappresenta anche la retta a cui appartiene la forza che si scambiano i denti e, per questo, viene detta *retta d'azione*, mentre l'angolo ϑ finisce per essere considerato una caratteristica della dentatura detto *angolo di pressione*, normalmente pari a 20° .

L'evolvente viene generata dalle successive posizioni assunte dal punto A di una retta a che viene fatta rotolare esternamente ad una circonferenza (fig.17b) ed è certamente capace di soddisfare la condizione di perpendicolarità e di garantire quindi la costanza del rapporto di trasmissione. Nella fig.17 a) viene rappresentata la retta a generatrice dei profili ad evolvente nel suo moto di rotolamento sulle circonferenze di raggio r_{d1} ed r_{d2} denominate circonferenze deferenti, si fa notare che tale retta risulta inclinata dell'angolo ϑ rispetto alla tangente comune per C alle due circonferenze

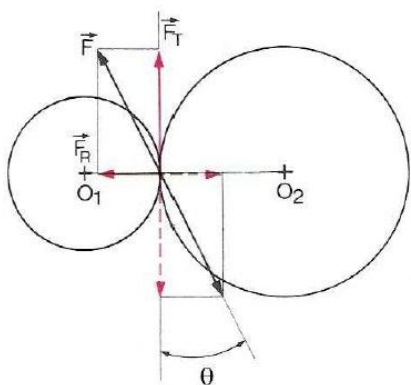


Fig.18 – Forze scambiate tra i denti in presa

Nella fig.18 vengono rappresentate le due ruote dentate limitatamente alle loro circonferenze primitive e si nota come, la forza \vec{F} che si scambiano i denti da luogo a due componenti, una tangenziale, \vec{F}_T , ed una radiale, \vec{F}_R . La forza tangenziale è quella responsabile del moto rotatorio e, oltre ad essere la componente della forza totale, è anche il rapporto tra la coppia motrice ed il raggio della ruota motrice o tra la coppia resistente ed il raggio della ruota condotta:

$$F_T = F \cos \vartheta = \frac{C_m}{R_1} = \frac{C_R}{R_2} .$$

La componente radiale, che non è responsabile del moto e costituisce una sollecitazione sull'albero su cui sono in contatto le ruote, è data da:

$$F_R = F \sin \vartheta = F \tan \vartheta .$$

Nella fig.19 riportiamo le forze radiale e tangenziale che insistono sul dente e le sollecitazioni che esse provocano sia sull'albero che sui supporti.

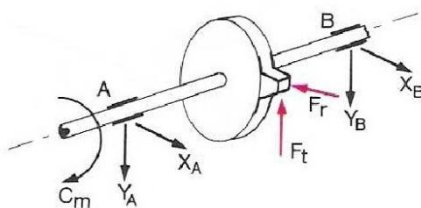


Fig.19 – Sollecitazioni indotte su albero e supporti

Il profilo nell'orologeria: Nella maggior parte dei moderni meccanismi, vengono utilizzati ingranaggi ad evolvente, mentre negli orologi si utilizzano denti cicloidali.

Perché si usano ingranaggi cicloidali tuttora?

La risposta è in qualche modo controversa, anche se sembra dovuta a tre ragioni:

1. I pignoni sono più facili da realizzare;
2. I treni di ingranaggi usati in orologeria sono costituiti da tanti pignoni di ruote motrici che hanno pochi denti. Il profilo ad evolvente per questi pignoni potrebbe essere radicalmente tagliato, il che causerebbe una più facile rottura e difficoltà di lavorazione.
3. È semplicemente tradizionale.

L'ideale per tutti gli ingranaggi è di avere un unico contatto tra la superficie del dente e l'ingranaggio, al fine di ridurre sia l'usura sia l'attrito. Nel caso di orologi, si vuole che la parte che agisce sul pignone tracci una linea retta; in questo modo, si ottiene che il profilo tra i due pignoni tracci un semplice cuneo. Se il cerchio generante fosse più largo, le tracce del pignone diventerebbero curve tagliate.

Un trattato sugli ingranaggi di ruote dentate negli orologi del 1890 [8] ritiene il profilo epicicloidale obsoleto. Una stranezza dei denti epicicloidali è che, girando dente dopo dente, si sviluppa un errore, cioè la distanza del centro operante si sposta dal centro nominale. Un altro problema è relativo ad un errore del profilo, che comporta un cambiamento del raggio di curvatura. Scoprendo questi errori, i progettisti di automobili hanno abbandonato il profilo epicicloidale perché causa di rumori e di elevata usura. Sono

prevalsi, così, i profili ad evolvente, che non dipendono dalla variazione di distanza dal centro, e il loro profilo è essenzialmente diritto. I progettisti di orologi, tuttavia, non hanno abbandonato il profilo epicicloidale. Infatti, questo ha funzionato bene per secoli, e per loro non sono necessari cambiamenti.

Interferenza e minimo numero di denti: Nella costruzione delle ruote dentate, non si può scendere sotto un certo numero di denti senza comprometterne il corretto funzionamento. In primo luogo si evidenzia che per poter avere tutto il profilo del dente ad evolvente occorre che la circonferenza deferente sia all'interno della circonferenza di fondo o, al massimo, coincidente con essa.

Realizzando quest'ultima ipotesi dovremmo avere $R_d = R_f$ dove, ovviamente R_d è il raggio della deferente e R_f quello della circonferenza di fondo, se R è il raggio della primitiva, m il modulo e ϑ l'angolo di pressione, poiché $R_d = R \cos \vartheta$ e per la (iv) $R_f = R - 1.25 m$

$$\Rightarrow R \cos \vartheta = R - 1.25 m .$$

Sostituendo ad R il suo valore dato dalla (ii), semplificando e risolvendo rispetto a Z si ottiene:

$$Z = \frac{2.5}{1 - \cos \vartheta}$$

che, per $\vartheta = 20^\circ$, fornisce il valore $Z = 42$ denti, troppo alto per non avere ruote eccessivamente grandi.

Per questo motivo, considerando che la parte di dente in prossimità della base non partecipa all'ingranamento, si sposta la circonferenza deferente all'esterno di quella di fondo e i tratti terminali, vicino alla base, dei profili dei denti anziché ad evolvente si preferisce farli rettilinei radiali, come mostrato nella fig.20.

Con questa soluzione, però, bisogna comunque limitare il minimo numero di denti per non correre il rischio di far lavorare la testa dei denti della ruota maggiore sul tratto rettilineo dei denti della ruota minore, creando interferenza.

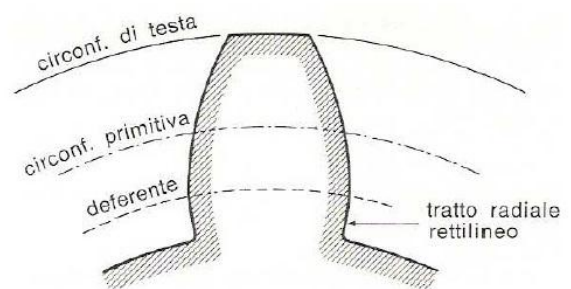


Fig.20 - Dente con tratti finali rettilinei radiali

Perché ciò non accada è indispensabile non scendere sotto un valore minimo per il numero di denti del pignone che si dimostra essere funzione del rapporto d'ingranaggio e dell'angolo di pressione secondo la seguente relazione:

$$Z_{min} = \frac{2}{\sqrt{u^2 + (1 + 2u) \sin^2 \vartheta} - u}$$

In molti casi Z_{min} si può ricavare da apposite tabelle.

Rotismi: Con un ingranaggio, ossia una coppia di ruote dentate, non è possibile trasmettere il moto con rapporti di trasmissione elevatissimi. Quindi si ricorre a "treni di ingranaggi" ossia ad insiemi di ruote dentate ingranati tra loro calettate su più alberi a costituire complessi meccanismi detti rotismi. Esistono due tipi di rotismi: rotismi ordinari, in cui tutti gli alberi sono fissi nella loro posizione pur potendo ruotare

sul proprio asse, e rotismi epicycloidali, in cui almeno uno degli alberi è mobile nel senso che oltre a poter ruotare intorno al proprio asse varia la sua posizione nel tempo e nello spazio. La fig. 21 mostra un rotismo ordinario costituito dall'albero motore che ruota ad n_1 giri al minuto, due alberi ausiliari intermedi che ruotano ad n_2 ed n_3 giri al minuto e un albero condotto che ruota ad n_4 giri al minuto; su di essi sono calettate le ruote dentate di Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 , e Z_6 denti. Per ciascun ingranaggio del rotismo si può determinare il rapporto di trasmissione:

$$i_1 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{Z_2}{Z_1} \qquad i_2 = \frac{n_2}{n_3} = \frac{Z_4}{Z_3} \qquad i_3 = \frac{n_3}{n_4} = \frac{Z_6}{Z_5}$$

mentre il rapporto di trasmissione totale è

$$i = \frac{n_1 n_2 n_3}{n_2 n_3 n_4} = i_1 i_2 i_3$$

dato dal prodotto dei rapporti parziali. In definitiva

$$i = \frac{Z_2 Z_4 Z_6}{Z_1 Z_3 Z_5}$$

formula utilissima per determinare i numeri dei denti delle ruote di un rotismo ordinario.

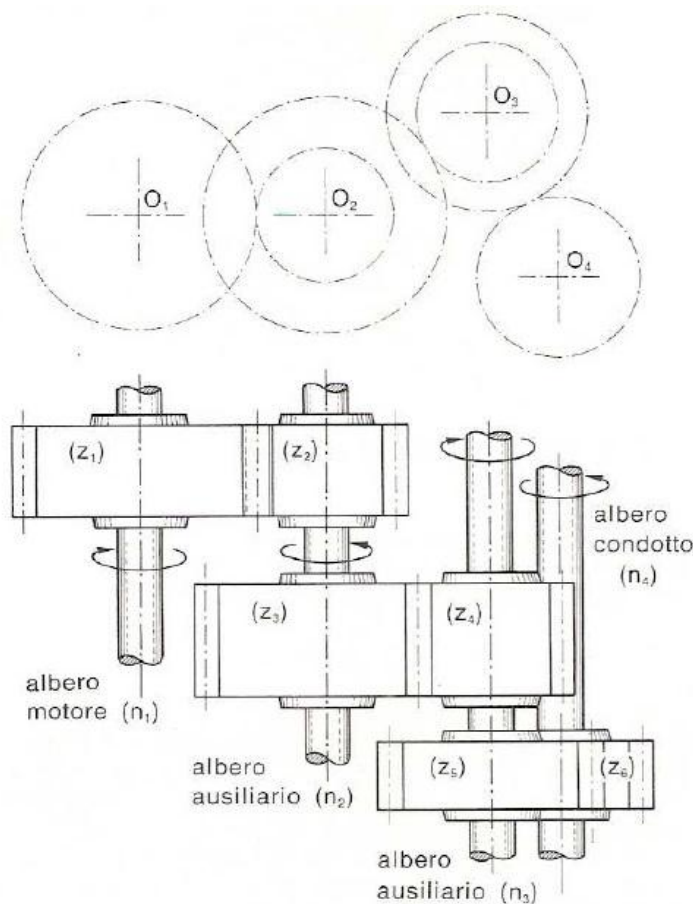


Fig. 21 - Rotismo ordinario

4. Orologio meccanico

Il problema più importante nella misurazione del tempo è stato quello di trovare uno strumento che riuscisse a dividere ulteriormente il trascorrere del giorno e della notte, ma soprattutto che riuscisse a dividere equamente ed in maniera costante questo spazio di tempo. Tralasciando meridiane, clessidre, candele ed altri metodi primitivi, i primi veri dispositivi che riuscissero a dividere equamente il tempo e che soprattutto dessero la possibilità di far vedere il trascorrere di esso sono stati il gruppo bilanciere-spirale ed il pendolo. Entrambi sono fautori di un fenomeno periodico che mantiene una buona costanza del proprio periodo. Poiché però non siamo nel vuoto, ma in presenza della forza di gravità, di resistenze ed attriti vari, questo moto periodico è destinato ad esaurirsi; quindi per mantenere costante e continuativo questo moto bisogna dotare i suddetti dispositivi di una forza motrice: il classico peso per il pendolo, o la molla (una striscia di metallo avvolta su se stessa e messa in un piccolo cilindretto chiamato **bariletto**) per il gruppo bilanciere-spirale.

In definitiva un orologio è tutto qui: un dispositivo che si muove ritmicamente ed un altro che fornisce energia per mantenere questo moto.

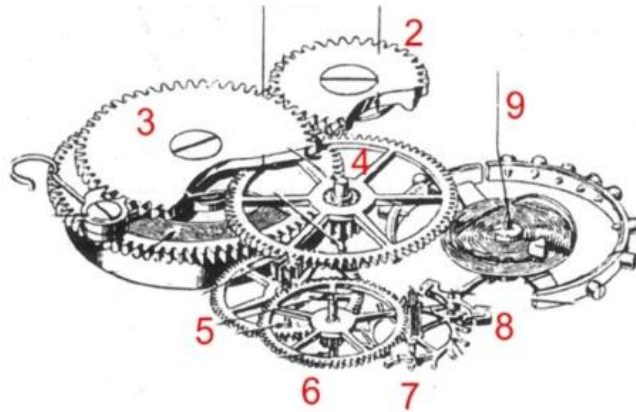
Tra la forza motrice ed il dispositivo di divisione troviamo tutta una serie di ruote e rinvii che permettono di dividere ulteriormente e rendere fruibile e visibile, attraverso un quadrante e delle lancette, il trascorrere del tempo. Il pendolo ovviamente sfrutta le sue caratteristiche solo all'interno di un dispositivo non trasportabile, quindi l'ora si poteva leggere solo recandosi nella stanza dove veniva posto l'orologio, o nelle piazze, dove gli orologi erano nelle torri dei campanili. L'altro sistema era quello di attendere il rintocco delle campane che segnavano il trascorrere delle ore. Ma quando, per svariati motivi non si potesse, o non si volesse spostarsi per conoscere l'ora, entrava in campo quel piccolo dispositivo che riusciva a dividere equamente il tempo e che non doveva, a differenza del pendolo, rimanere fermo da qualche parte, ma si poteva portare ovunque: il gruppo bilanciere-spirale.

Proviamo ora ad analizzare un movimento di orologio, un semplice carica manuale, per vedere che percorso compie l'energia liberata dalla molla per arrivare al bilanciere. Possiamo vedere lo sviluppo su due movimenti, un Unitas ed un Eta (Peseux) 7001. Possiamo notare subito che, nonostante la diversa disposizione dei rotismi, il percorso è sempre lo stesso.

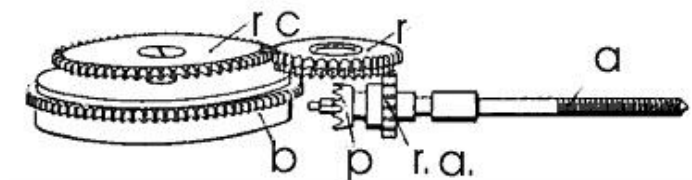


Attraverso la corona di carica (1) andiamo ad agire sulla ruota intermedia di carica (2) ed attraverso il rocchetto del barileto (3) carichiamo la molla. Una volta che la molla è carica, inizia il percorso che porterà a far lavorare il bilanciere in modo che questi possa restituire un moto uniforme e costante.

Il barileto innesta sulla ruota di centro (4) che a sua volta ingrana sulla prima ruota (5), Successivamente troviamo la ruota secondi, (6) che dalla parte del quadrante ha il perno che consente di alloggiare la lancetta dei piccoli secondi. Dopo la ruota secondi troviamo la ruota di scappamento (7) che attraverso l'ancora (8) darà l'impulso al bilanciere (9) che potrà così compiere il suo moto oscillatorio. Possiamo vedere meglio il tutto in questo schema, che mostra solo le ruote senza i relativi ponti e palatine.



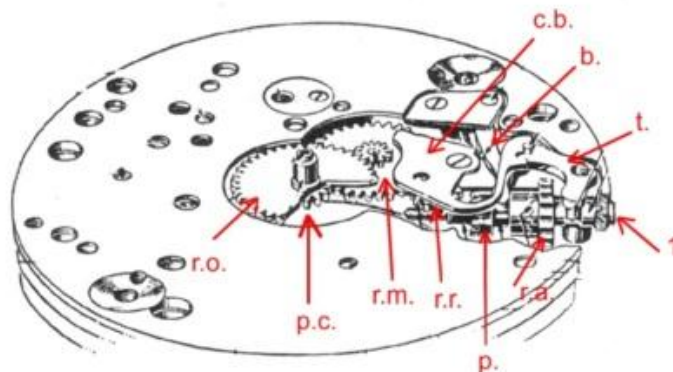
Tutto il gruppo di carica è meglio evidenziato nello schema seguente,



dove si vede che l'albero di carica (a), attraverso la coppia carica (pignone scorrevole (p) e ruotino d'angolo (r.a.)), agisce sulla ruota intermedia di carica (r) che a sua volta, innestando sul rocchetto del barileto (r c) carica la molla che si trova all'interno del barileto (b).

Tutto questo però sarebbe inutile se non riuscissimo a renderlo leggibile.

Ora ribaltiamo il movimento e vediamo cosa c'è sotto il quadrante.



La trasmissione del moto ed il conseguente spostarsi delle lancette avviene per mezzo del rocchetto calzante (o chaussee) (p.c.) che è innestato, forzato, sul perno della ruota centro (4).

Il pignone calzante muove la ruota della minuteria (r.m.) che a sua volta trascina la ruota ore (r.o.).

Con un opportuno rapporto nel numero dei denti di queste tre ruote si fa in modo che per ogni giro completo del rocchetto calzante, al quale viene fissata la lancetta dei minuti, la ruota ore e di conseguenza la lancetta delle ore fissatavi, compia 1/12 di giro.

Abbiamo così la lettura delle ore e dei minuti sul quadrante del nostro orologio. L'ultima cosa che dobbiamo fare è mettere le lancette dell'orologio nella giusta posizione, quando ci accingiamo a farlo funzionare o per eliminare anticipi o ritardi.

Per fare questo utilizziamo l'albero di carica: quando viene tirato e spostato dalla sua posizione normale di carica della molla, per mezzo del tiretto (t.) e di una leva chiamata bascula (b.) fa ingranare il pignone scorrevole (p.s.) sul ruotino di rinvio (r.r.) (o ruota intermedia di messa all'ora). Il ruotino di rinvio innesta a sua volta sulla ruota della minuteria e fa girare il rocchetto calzante, che come dicevamo, è fissato a frizione sul perno della ruota centro.

Abbiamo così lo spostamento delle lancette.

PRINCIPALI COMPONENTI



- **MOLLA DEL BILANCIERE**

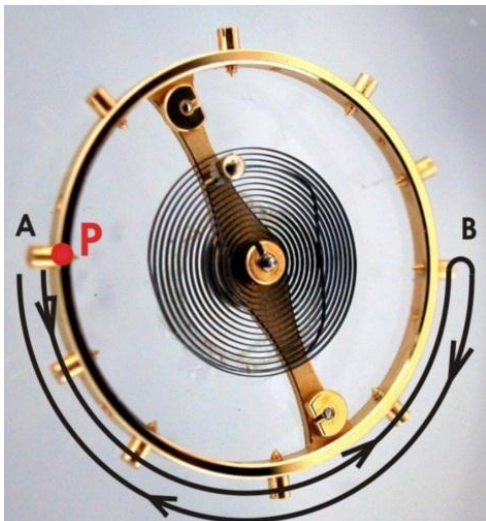
Dunque negli orologi da polso a movimento meccanico, il tempo viene scandito da una molla che comanda il moto di un equipaggio chiamato **bilanciere**, in grado di oscillare in un piano qualsiasi.

Un evidente svantaggio dell'orologio a pendolo è l'impossibilità di essere usato in movimento, in quando il pendolo verrebbe perturbato gravemente nella sua oscillazione cessando di funzionare.

Poiché la misura precisa del tempo è importante per determinare, per esempio, la longitudine in mare, la necessità di un sistema alternativo era molto sentita.

La soluzione, ideata nel 1675 da Huygens, proprio per ovviare a questo limite, è il *bilanciere*, in grado di funzionare in qualunque posizione ed in movimento. È costituito da un volano di opportuna massa fatto ruotare intorno al suo asse e collegato ad un sistema di scappamento simile a quello del pendolo. Il volano ruota con regolarità alternativamente in senso orario ed antiorario, scambiando energia cinetica con energia potenziale accumulata da una molla a torsione a cui è vincolato. Questo dispositivo, notevolmente migliorato, è tuttora in uso negli orologi da polso interamente meccanici.

Analizziamo il gruppo bilanciere-spirale: immaginiamo un bilanciere che possa muoversi liberamente, avendo fissata l'estremità della spirale al ponte (è sufficiente levare l'ancora) e diamo una piccola spinta al suo volantino: la prima cosa che noteremo sarà che, grazie alla spirale ed al suo espandersi e contrarsi, si muoverà avanti e indietro con ampiezze sempre minori fino a fermarsi del tutto: definiamo subito questo movimento.

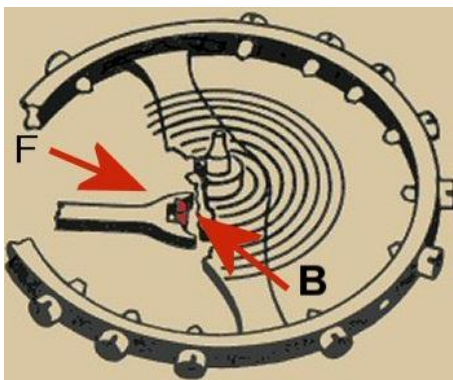


Definiamo “oscillazione” il percorso che fa un punto P nel volantino del bilanciere partendo da A per arrivare a B e tornare ad A. La metà esatta di questo viaggio, e cioè il percorso A-B (o il ritorno B-A) è detta “alternanza”.

Abbiamo così chiarito cosa significa avere un orologio che fa 18.000 alternanze/ora: vuol dire che compie per 9000 volte il percorso A-B e per altre 9000 il ritorno B-A

Se fossimo in mancanza di attriti, avremmo risolto subito il primo dei nostri problemi, perché il bilanciere continuerebbe a marciare all'infinito. Ma nella realtà queste oscillazioni diminuiranno progressivamente di ampiezza per arrestarsi poi del tutto.

Si noti però che le oscillazioni saranno sempre della medesima durata, pur diminuendo di ampiezza: questo perché diminuisce la distanza percorsa, ma diminuisce anche la velocità del punto P. Ci troviamo di fronte ad un fenomeno periodico ed isocrono. Si deve fare in modo che questo movimento resti costante nel tempo, e che non si esaurisca dopo poche oscillazioni: per fare questo è necessario rinnovare periodicamente la spinta iniziale. Questo è possibile dando dei piccoli impulsi al bilanciere attraverso l'àncora, che a sua volta riceve l'impulso dalla ruota di scappamento.



L' àncora agisce sul bilanciere con la sua parte terminale chiamata “forchetta” (F) che lavora sul bottone del disco (B) del bilanciere.

Dall'altra parte l'àncora ha due leve che, ricevendo l'impulso dalla ruota di scappamento, trasformano il moto rotatorio della ruota stessa in moto alternativo del bilanciere.

Si deve fare in modo che queste alternanze si possano contare e riportare in maniera leggibile: entra in gioco quindi il treno di ruote che dalla molla trasmette il moto al bilanciere. Per rendere semplice il discorso, dobbiamo fare riferimento alla ruota di centro,

che possiamo individuare nel disegno sulle ruote, al N° 4. E' infatti sul perno della ruota centro che viene innestata la lancetta dei minuti e da questo prende il moto anche la lancetta delle ore.

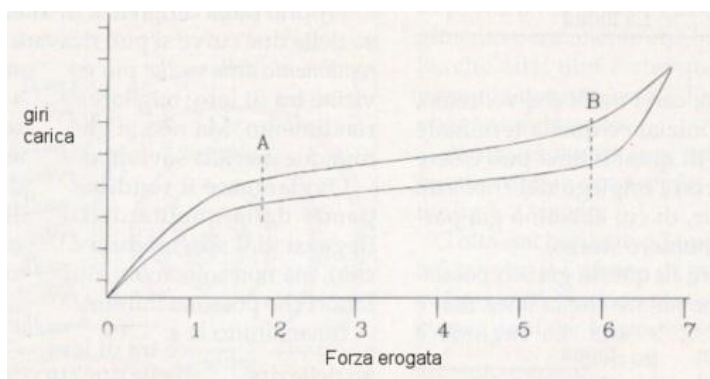
Nel caso del nostro orologio è necessario che alle 18.000 alternanze/ora del bilanciere corrisponda un giro completo della ruota centro e di conseguenza della lancetta dei minuti. Per ottenere il numero di denti delle varie ruote si usa il rapporto di trasmissione: bisogna cioè calcolare il numero di giri che deve fare ciascuna ruota per farne compiere un numero proporzionalmente adeguato alla successiva, fino ad arrivare al famoso giro della ruota centro in un'ora.

- MOLLA DEL BARILETTO

La fonte di tutta l'energia che il bilanciere ed il treno degli ingranaggi si incaricano di trasformare in un dato leggibile è essenzialmente la molla.

La molla è una striscia di acciaio che viene avvolta su sé stessa ed inserita in un contenitore metallico chiamato barileto.

Uno dei problemi che assillava i costruttori di orologi era la poca omogeneità nell'erogazione dell'energia da parte della molla.



Nel grafico vediamo come la forza erogata sia molto alta quando la molla è tutta carica, mantiene un rendimento abbastanza costante durante la fase centrale del suo lavoro, per poi diminuire repentinamente l'energia erogata negli ultimi giri di carica.

Si utilizzarono dei dispositivi, il più famoso è la croce di Malta, per far lavorare la molla solo nella fase centrale della sua carica, tra i punti A e B.

Diamo un'ultima occhiata alla formula che, in linea teorica, determina l'energia sviluppata dalla molla:

$$M = \frac{\pi E s^3 h n}{6l}.$$

Dove M è il momento elastico (la forza della molla), E è il modulo di elasticità del materiale, s è lo spessore della molla, h è l'altezza della molla, n è il numero di giri di avvolgimento e l è la lunghezza della molla.

La formula è teorica e si riferisce a spire che non si toccano tra loro, ma ha comunque una validità ed è messa solo per far notare quanto siano importanti certi parametri per la determinazione di una molla o di una sua sostituzione.

Se noi variamo il suo spessore infatti, tale variazione si ripercuoterà in maniera pesante perché lo spessore viene calcolato al cubo, quindi variazioni di tale parametro a prima vista non significative avranno ripercussioni abbastanza importanti sul funzionamento dell'orologio.

E' chiaro che un grafico teorico di questa formula risulterebbe improponibile da applicare ad un orologio: aumentando il numero dei giri di carica infatti la forza aumenta in proporzione e costantemente, mentre nella pratica, dalle rilevazioni fatte mediante dinamometri, il grafico è quello dato sopra.

- SCAPPAMENTO

Innanzitutto cominciamo col ricordare cos'è e qual è la funzione di base dello scappamento, in un qualsiasi orologio meccanico.

Si tratta di un insieme di componenti, fondamentalmente l'ancora e la ruota di scappamento, preposti a far interagire il treno del tempo con l'organo regolatore.

In pratica: l'energia fornita dalla molla di carica contenuta nel barileto o dai pesi, in assenza di un organo regolatore, farebbe girare tutti i ruotismi dell'orologio, alcuni dei quali hanno le lancette fissate ai loro perni, a velocità crescente, frenata solo dagli attriti. L'organo regolatore (bilanciere) deve potersi occupare di rendere uniforme tale velocità di rotazione, in modo che ad ogni giro delle lancette corrispondano intervalli di tempo predefiniti sempre di uguale durata.

Per ottenere questo risultato, la ruota più veloce del gruppo che prende il moto dal bariletti viene fatta interagire con l'organo regolatore, in modo da costringerla ad una velocità media di rotazione costante. L'elemento che consente questa interazione è l'ancora, incaricata di controllare la rotazione della ruota di scappamento, fermando via via ciascuno dei suoi denti e rilasciandolo al comando dell'organo regolatore, il quale viene mantenuto in movimento (un moto armonico caratterizzato da una costanza del periodo più elevata possibile) proprio dalla energia che l'ancora gli cede (dopo averla ricevuta dal bariletti per il tramite della ruota di scappamento stessa) durante la fase di rilascio di ciascuno dei denti. Negli orologi da polso moderni il sistema di scappamento è basato sulla presenza di un'ancora svizzera e di un bilanciere circolare reso oscillante attorno al suo asse grazie alla presenza di una molla a spirale; l'ancora interagisce per il tramite di due pietre inclinate (leve di entrata e di uscita) con i denti della ruota di scappamento ed attraverso la forchetta posta all'estremità del suo stelo con il bottone del bilanciere, dal quale viene spostata durante la fase di passaggio del bilanciere stesso, nella sua oscillazione, per la posizione di equilibrio, ottenendo che una delle due leve liberi il dente che aveva fermato, dandogli quindi un impulso attraverso la sua superficie attiva inclinata.

Lo scappamento, assieme al bilanciere, è il cuore dell'orologio; è da lì che proviene il TIC TAC che sentiamo. Egli frena lo scorrere del ruotismo e fa oscillare sia il pendolo che il bilanciere, e regola così lo scorrere del ruotismo per indicarci il tempo.

Senza entrare nei dettagli, poiché non strettamente legati alla matematica, elenchiamo gli altri componenti principali:

- OSCILLATORE



Si è già più volte parlato dell'importanza del bilanciere nell'orologio. Quest'ultimo infatti, insieme con la spirale, forma l'organo regolatore, che con le sue oscillazioni guida il movimento del treno d'ingranaggi (treno del tempo) collegato alle lancette. I perni dell'asse del bilanciere sono delicatissimi. Per ridurre al minimo l'attrito, hanno un diametro di appena 0,06 - 0,12 mm. Il loro cuscinetto è in rubino sintetico ed è tenuto in posizione da un sistema antiurto chiamato *Incabloc*.

L'Incabloc non è nient'altro che un sistema antiurto che agisce in due fasi: inizialmente, l'energia dell'urto trasferita dall'asse del bilanciere viene interamente assorbita dal blocco ammortizzante; nella seconda fase il sistema si ricentra immediatamente e con estrema precisione.

- Carica

Negli orologi da tasca o da polso a caricamento automatico si sfrutta il movimento che imprime all'orologio chi lo porta, camminando o muovendo il polso. In questo caso l'oscillazione di una piccola massa a interna all'orologio, detta *rotore*, per effetto del movimento alternativo del braccio, agisce, mediante un meccanismo ad arpionismo, sulla ruota di carica.

Negli orologi a carica manuale, per far oscillare il cuore dell'orologio, è necessaria un'energia e qualcosa che gliela trasmette. L'energia viene fornita dalla molla posizionata nel bariletti, la cui circonferenza è dentata. Tramite il treno ruote, la forza arriva all'ultima ruota, chiamata di scappamento che ha una dentatura particolare. Con questo sistema è sufficiente caricare la molla tramite la corona una volta al giorno.

5. Bibliografia

[1] *Dispense del professor Nazzareno Corigliano su Ruote Dentate e Ruote Frizione*

[2] Donald De Carle, *L'orologiaio riparatore*, Editore Ulrico Hoepli Milano, 2009

[3] Hallyday, Resnick, Walker, *Fondamenti di fisica, volumi 1 e 2*, Casa Editrice Ambrosiana, 2006

[4] Focardi, Massa, Uguzzoni, *Fisica generale elettromagnetismo*, Casa Editrice Ambrosiana, 2007

[5] Sanini, *Lezioni di geometria*, Levrotto & Bella, 1984

[6] G. Castellani - v. Zanotti, *La resistenza degli ingranaggi. tecniche nuove* 1980

Sitigrafia

[7] *Storia del tempo nella matematica* http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Time_1.html

[8] *Funzionamento di un orologio meccanico* <http://www.stefaniatruppo.it/orologiomeccanico.html>